7.1. Grenzwerte

(a) Wir sehen dank der Stetigkeit in $x = \pi$:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2 - \pi x + 3}{x^2 + \pi^2} = \frac{\pi^2 - \pi^2 + 3}{\pi^2 + \pi^2} = \frac{3}{2\pi^2}.$$

(b) Durch Ausklammern sehen wir für $x \neq 0$:

$$\frac{x^2 - \pi x + 3}{x^2 + \pi^2} = \frac{x^2(1 - \frac{\pi}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 + \frac{\pi^2}{x^2})} = \frac{1 - \frac{\pi}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{\pi^2}{x^2}}$$

Daher gilt, da $1/x, 1/x^2$ gegen 0 konvergieren für $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \pi x + 3}{x^2 + \pi^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\pi}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{\pi^2}{x^2}} = 1.$$

(c) Gemäss Beispiel 3.5.2 wissen wir, dass der Grenzwert 0 sein muss. Dies lässt sich auch wie folgt sehen:

$$\frac{6x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x^2(6 + \frac{1}{x})}{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})} = \frac{1}{x} \cdot \frac{6 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Verwendet man nun die Konvergenz von Zähler und Nenner gegen 6 bzw. 1 und sieht, dass $1/x$ gegen 0 geht, so folgt die gewünschte Aussage.

(d) Es gilt noch immer:

$$\frac{6x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{6 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Daher ist auch dieser Grenzwert gerade 0. Beachten Sie, dass selbstverständlich gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(e) Wir finden durch Faktorisieren sowie $-x = |x|$ für $x < 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{|x| + e} - \sqrt{-x} &= \frac{|x| + e - (-x)}{\sqrt{|x| + e} + \sqrt{-x}} \\ &= \frac{e}{\sqrt{|x| + e} + \sqrt{|x|}}\end{aligned}$$

Nun folgt also:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x| + e} - \sqrt{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e}{\sqrt{|x| + e} + \sqrt{|x|}} = 0$$

(f) Es gilt wie bereits oben gesehen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x|+e}-\sqrt{|x|}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+e-|x|}{\sqrt{|x|+e}+\sqrt{|x|}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e}{\sqrt{|x|+e}+\sqrt{|x|}}=0\,.\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(x) := (e^2+x)^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, können wir den Grenzwert hineinziehen und erhalten

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^2+\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right)^2=(e^2)^2=e^4\,.$$

(g) Es gilt $\lim_{x\to 100}(x-100)\sin\left(\frac{1}{x-100}\right)=\lim_{z\to 0} z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Da $\sin\left(\frac{1}{z}\right)\in[-1,1]$ für alle $z\neq 0$ und somit beschränkt ist, folgt unmittelbar, dass $\lim_{z\to 0} z\sin\left(\frac{1}{z}\right)=0$.

(h) Dank des Hinweises finden wir:

$$\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{x^{m-1}+\ldots x+1}{x^{n-1}+\ldots+x+1}$$

Daher gilt, da Polynome stetige Funktionen sind und der Grenzwert des Zählers und Nenners für $x\to 1$ ungleich 0 sind:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+\ldots x+1}{x^{n-1}+\ldots+x+1}=\frac{m}{n}.$$

7.2. Maximum und Minimum von Funktion

Wir bemerken zuerst, dass gilt:

$$f(x)>0,\quad \forall x\in[1,\infty[$$

Zudem berechnen wir den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+x}{x^3+x^2+x+1}=0,$$

da der Zähler ein Polynom kleineren Grades als der Nenner ist. Somit folgert sich, dass das Infimum von f gerade 0 ist und wegen der Positivität von f daher kein Minimum angenommen wird. Bezüglich Maximum bemerken wir, dass:

$$f(1)=\frac{7}{4}>0$$

Aufgrund der Konvergenz gegen 0 in $+\infty$ wissen wir, dass ein $R > 0$ existiert, sodass:

$$f(x) < \frac{7}{4}, \quad \forall x > R$$

Bemerken wir noch zusätzlich, dass das Maximum von f auf $[1, R]$ existiert gemäss Theorem 3.3.2 und grösser oder gleich $f(1) = \frac{7}{4}$ ist, so folgern wir sofort, dass dies auch das Maximum von f auf $[1, \infty[$ ist, zumal f auf $]R, \infty[$ nie grösser als $\frac{7}{4}$ und somit stets kleiner als das Maximum auf $[1, R]$ sein wird. Also nimmt f sein globales Maximum an.

7.3. Stetigkeit für Funktionen auf $\mathbb{C}$

Es sei für die gesamte Aufgabe $f : I \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine allgemeine Funktion. Wir erinnern uns an die allgemeine Definition der Stetigkeit: Eine Funktion f ist stetig in einem Punkt $x_0 \in I$ genau dann, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(a) Es sei f_1 der Realteil von f und f_2 der Imaginärteil von f, jeweils in jedem Punkt $x \in I$ bestimmt. Dann ist die gewünschte Zerlegung gefunden. Wir bemerken, dass wir konkrete Formeln geben können:

$$f_1(x) := \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2}, \quad f_2(x) := \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2i}$$

(b) Nehmen wir zuerst an, dass f in x_0 stetig ist. Wir beachten, dass für komplexe Zahlen $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ stets gilt:

$$|z\ | = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$$

Daher können wir aus der Zerlegung der vorherigen Aufgabe folgern:

$$|f(x) - f(x_0)| \geq |f_1(x) - f_1(x_0)|$$

Da f stetig ist in x_0, folgt somit sofort, dass f_1 stetig in x_0 ist dank Lemma 3.2.4. Dasselbe Argument lässt sich für f_2 wiederholen.

Es seien nun f_1 und f_2 in x_0 stetig. Abermals erinnern wir uns, dass für beliebige komplexe Zahlen $z = a + bi$ gilt:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{(|a| + |b|)^2} = |a| + |b|$$

Somit können wir schliessen:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_2(x) - f_2(x_0)|$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass für alle $x \in I$ mit $|x-x_0| < \delta_j$ gilt:

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

für $j = 1, 2$. Dies gilt dank der Stetigkeit der Funktionen in x_0. Setzen wir nun $\delta = \min\{ \delta_1, \delta_2\} > 0$, so finden wir für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ dank der obigen Ungleichung:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_2(x) - f_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also ist per Definition auch f stetig in x_0.

(c) Wir definieren $I = [0, 1]$ und $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ wie folgt:

$$f(x) := x + x(1 - x)i, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Es gilt offensichtlich $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ dank direktem Einsetzen. Zudem sehen wir, dass der Realteil $f_1(x) = x$ und Imaginärteil $f_2(x) = x(1 - x)$ Polynome sind und daher stetig. Somit haben wir das gewünschte Beispiel gefunden.

(d) Für die Verallgemeinerung ersetze man $I \subset \mathbb{R}$ in Proposition 3.2.10 durch eine Menge $I \subset \mathbb{C}$. Der Beweis ist exakt identisch wie im Skript: Es sei zuerst f stetig in x_0 und (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x_0. Es sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig und ein $\delta > 0$ wie aus der Definition der Stetigkeit von f in x_0. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass:

$$|a_n - x_0| < \delta, \quad \forall n \geq N$$

Dank der Stetigkeit von f in x_0 und der Wahl von $\delta > 0$ impliziert dies:

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

was sofort zeigt, dass $(f(a_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Nehmen wir jetzt an, dass f konvergente Folgen mit Grenzwert x_0 auf konvergente Folgen mit Grenzwert $f(x_0)$ abbildet. Nehmen wir aber an, dass f nicht stetig in x_0 ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ existiert. Ist n eine natürliche Zahl und wählen wir also $a_n \in I$ mit $|a_n - x_0| < \delta$ sowie $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, so haben wir eine Folge konstruiert, welche gegen x_0 konvergiert, aber $(f(a_n))$ kann nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und somit ist f stetig in x_0.

(e) Der Verweis aus dem Hinweis ergibt einen sofortigen Beweis aller Eigenschaften und wird daher nicht genauer beschrieben. Für die Komposition von Funktionen verwende man die Proposition 3.2.10.

7.4. Funktionalgleichung

Setzen wir $\frac{x}{2}$ statt x ein, so erkennen wir:

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2}\Big)$$

Setzt man $\frac{x}{4}$ statt x ein, so ergibt sich:

$$f\Big(\frac{x}{2}\Big) = f\Big(\frac{x}{4}\Big)$$

Somit auch:

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{4}\Big)$$

Wir beweisen nun per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$$

Für $n = 0, 1$ und 2 haben wir dies bereits bewiesen. Gehen wir also zum Induktionsschritt über und nehmen an, die Gleichung gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und alle x. Dann folgt durch Einsetzen von $\frac{x}{2^n}$ statt x in die Funktionalgleichung:

$$f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)$$

Per Induktionsannahme also:

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)$$

Dies beendet den Induktionsbeweis.

Wir fixieren nun $x \in \mathbb{R}$ und bemerken:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^n} = 0$$

Dank der Stetigkeit von f folgt also mit der Aussage oben:

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$$

Also ist f konstant.

7.5. Normale Konvergenz

(a) Wir beachten, dass folgende Schranke existiert für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Da folgende Konvergenz gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

können wir schliessen, dass die Reihe normal konvergiert und die Grenzfunktion gemäss Korollar 4.2.4 stetig ist.

(b) Setzen wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den Wert $x = 0$ ein, so sehen wir sofort:

$$\frac{1}{n + 0^2} = \frac{1}{n}$$

Da die folgende Reihe absolut divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

konvergiert die Funktionenreihe also nicht normal. Die Grenzfunktion ist in $x = 0$ undefiniert, also kann sie dort sicherlich nicht stetig sein. Ganz allgemein können wir zeigen, dass die Reihe nirgends konvergiert, denn gegeben $x \in \mathbb{R}$, so sehen wir für alle $n \geq x^2$:

$$\frac{1}{n + x^2} \geq \frac{1}{2n},$$

und somit haben wir eine untere Schranke gefunden, welche keine konvergente Reihe ist.

(c) Wir beachten, dass gilt für alle n und x:

$$\left| \frac{2^{-n}}{n + x^2} \right| \leq \frac{2^{-n}}{n} \leq 2^{-n},$$

und da die geometrische Reihe absolut konvergiert für $q = 1/2$, folgt also normale Konvergenz. Daher ist die Grenzfunktion dank Korollar 4.2.4 auch stetig.

(d) Wir schätzen ab:

$$\sqrt{1 - x^2} \leq \sqrt{1} = 1, \quad \forall x \in [0, 1]$$

also auch:

$$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Daher konvergiert die Reihe wie bei der ersten Teilaufgabe normal und die Grenzfunktion ist abermals stetig,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3-(x+1)^3+3x^2+3x+1}{\sqrt{n}}$ auf $[0,1]$ Wir beobachten:

$$\begin{aligned} x^3-(x+1)^3+3x^2+3x+1 &= x^3-x^3-3x^2-3x-1+3x^2+3x+1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

Also ist die Reihe aus der Aufgabenstellung nur eine umständlichere Schreibweise für:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0$$

Diese Reihe konvergiert normal und die Grenzfunktion (die nur die konstante Funktion mit Wert 0 ist) ist naheliegenderweise stetig.