8.1. Konvergenzradius

(a) Wir bemerken, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = q|x|,$$

gilt. Dank der Aufgabe 6.1 wissen wir, dass die Potenzreihe also absolut konvergiert, falls $q|x| < 1$, was äquivalent zu $|x| < 1/q$ ist. Dies ist aber gerade die gewünschte Aussage.

(b) Abermals dank Aufgabe 6.1 und des Grenzwertes aus der vorherigen Aufgabe wissen wir, dass die Potenzreihe absolut divergiert, falls $q|x| > 1$, also $|x| > 1/q$.

(c) Gemäss Definition 4.3.2 folgt automatisch, dass der Konvergenzradius R der Potenzreihe die folgende Ungleichung erfüllt:

$$R \geq \frac{1}{q},$$

da die Potenzreihe absolut konvergiert für alle $|x| < 1/q$. Beachten Sie, dass $q = 0$ nun bereits impliziert, dass $R = +\infty$, also sei von nun an $q \neq 0$. Wir heben an dieser Stelle hervor, dass die Potenzreihe für alle $|x| > 1/q$ absolut divergiert, dies aber nicht automatisch heissen muss, dass die Potenzreihe für jeden Wert x mit $|x\ | > 1/q$ auch bedingt divergiert. Hierzu müssen wir folgendes beachten: Nehmen wir an, dass $\varepsilon > 0$ und dass $|x| > 1/q + \varepsilon$. Dann gilt:

$$q|x\ | > 1 + q\varepsilon > 1$$

Somit auch für n gross genug:

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 + \frac{q\varepsilon}{2} \ \Rightarrow\ |a_n x^n| > \left(1 + \frac{q\varepsilon}{2}\ \right)^n$$

Dies zeigt, dass die Reihenglieder keine Nullfolge sind und somit kann die Reihe nicht konvergieren dank Proposition 2.10.3. Also folgt, dass $R \leq 1/q$. Nimmt man beide Ungleichungen zusammen, so sehen wir:

$$R = \frac{1}{q}$$

Hinweis: Wir haben hier eine striktere Aussage als im Wurzelkriterium bewiesen erhalten, nämlich dass wenn der Grenzwert > 1 ist, so konvergiert die Folge allgemein auch bedingt nicht. Dies ist eine nützliche Aussage.

(d) Wir sehen, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x\ | = q|x|$$

Daher, analog zum Wurzelkriterium, lässt sich durch Vergleich mit der geometrischen Reihe folgern:

- Falls $|x| < 1/q$, dann konvergiert die Potenzreihe absolut.
- Falls $|x| > 1/q$ ist, so divergiert die Reihe (sogar bedingt!), denn für n gross genug gilt für ein fixiertes kleines $\varepsilon > 0$:

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > 1+\varepsilon \ \Rightarrow\ |a_{n+M}x^{n+M}| \geq (1+\varepsilon)^M |a_n x^n|,$$

  was keine Nullfolge ist und somit nach Proposition 2.10.3 der Konvergenz widerspricht.

Mit demselben Argument wie in der vorherigen Teilaufgabe gilt also:

$$R = \frac{1}{q}$$

(e) a) Mit dem Quotientenkriterium folgt aus:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)},$$

also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{1}{4}$$

Der Konvergenzradius ist also 4.

b) Dank des Wurzelkriteriums ist klar, dass:

$$\sqrt[n]{2^{n^2}|x|^n} = 2^n|x\ |,$$

was gegen $+\infty$ konvergiert. Also konvergiert die Reihe nur für $x = 0$ (dort sind alle Reihenglieder bis auf das erste 0!) und der Konvergenzradius also 0.

c) Es sei (a_n) die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe, dann gilt hier:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \neq m^2, \forall m \in \mathbb{N}_0 \\ 2^m, & \text{wenn } n = m^2, m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Beachte, dass dann die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gerade die gewünschte Potenzreihe ist. Dann liefert das Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{|2^n x^{n^2}|} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} |x| = |x\ |,$$

also ist der Konvergenzradius 1.

d) Wir bemerken, dass gilt:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k$$

Wir bemerken, dass wenn wir n gegen ∞ gehen lassen, so konvergiert der Ausdruck gegen 1. Daher folgt mit dem Quotientenkriterium, dass der Konvergenzradius also gerade 1 ist.

8.2. Gleichmässige Konvergenz vs. Normale Konvergenz

(a) Es sei zu bemerken, dass punktweise Konvergenz gegeben ist (Warum?). Wir bemerken, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow |f_n(-1)| = \frac{1}{n}$$

Dadurch ist eine obere Schranke für f_n mindestens $1/n$. Man beachte aber, dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

dies widerspricht aber der normalen Konvergenz der Reihe.

(b) Es ist leicht einzusehen, dass die gleichmässige Konvergenz auf $[0, 1/2]$ gilt, denn dort konvergiert die Reihe sogar normal dank:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1/2] : |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n n}$$

Es reicht also zu zeigen, dass die Reihe auf $[-1, 0]$ gleichmässig konvergiert. Auf dieser Menge bemerken wir, dass die Reihe die Form aus dem Leibniz Kriterium (Prop. 2.10.10) besitzt. Mit der Technik aus Beispiel 2.10.9 finden wir:

$$\left|s_n(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Dazu muss man nur $n \to \infty$ lassen für u_n oder v_n unter Verwendung der Monotonie. Dies impliziert aber direkt die gleichmässige Konvergenz der Reihe.

8.3. Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

(a) Man beachte, dass gilt:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

daher folgt sofort durch Vergleichen der Definitionen:

$$\cosh(x) = \cos(ix)$$

Analog gilt:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{i}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2},$$

also:

$$\sinh(x) = \frac{1}{i}\sin(ix) = -i\sin(ix).$$

(b) Direktes Einsetzen zeigt:

$$\begin{aligned}
\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.
\end{aligned}$$

(c) Wir erinnern uns an die Definition der Exponentialreihe:

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Daher können wir ausrechnen:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

Mit analogen Überlegungen können wir sehen:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Man beachte, dass da diese Potenzreihen Summen von Exponentialreihen sind, so ist bereits klar, dass der Konvergenzradius $+\infty$ ist und die Funktionen daher auf ganz $\mathbb{C}$ stetig sind.

(d) Wir bemerken, dass gilt:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\sinh(x).$$

Die zweite Identität folgt komplett analog.

(e) Man beachte, dass wir mittels des asymptotischen Verhaltens der Exponentialfunktion wissen (Korollar 4.4.4):

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty,$$

und dies impliziert, dass die Funktion surjektiv ist. Dies ist klar, da wie bereits beobachtet die Funktion sinh stetig ist und somit sich der Zwischenwertsatz anwenden lässt. Zudem ist die Funktion auch injektiv, da e^x und $-e^{-x}$ beide streng monoton wachsend sind, man beachte Korollar 4.4.4. Nach Proposition 3.4.1 ist sinh also injektiv und besitzt nach Proposition 3.4.2 eine stetige Inverse. Diese wollen wir nun bestimmen:

Es sei $y_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl, wir wollen x bestimmen, sodass:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y_0$$

Mit dem Hinweis setzen wir:

$$z = e^x \Rightarrow \frac{z - \frac{1}{z}}{2} = y_0$$

Umformen führt nun zu:

$$z^2 - 2y_0 z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{2y_0 \pm \sqrt{4y_0^2 + 4}}{2} = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 1}$$

Man beachte, dass $z = e^x > 0$, also muss sogar gelten:

$$e^x = z = y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}$$

Nimmt man nun den Logarithmus auf beiden Seiten, so finden wir:

$$x = \log\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}\right)$$

Diese Berechnung beweist nun, dass folgende Funktion die Inverse zu sinh ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \log\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}\right)$$