9.1. Gleichungen in $\mathbb{C}$

(a) Wir suchen Lösungen $z = r \cdot e^{i\varphi}$ in Polarkoordinatenform. Daher lässt sich die Aufgabe umformulieren als:

$$r^3 \cdot e^{3\varphi i} = 1$$

Die Polarkoordinatenform von 1 ist gerade:

$$1 = 1 \cdot e^{0i}$$

Durch Vergleichen finden wir:

$$1 = r^3, \quad 3\varphi = 0 + 2\pi k,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$. Nun können wir sofort folgern, dass $r = 1$, zumal $r \geq 0$ und wir erkennen:

$$\varphi = \frac{2\pi k}{3},$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Aufgrund der Periodizität modulo 2π Abbildung $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ finden wir somit genau drei verschiedene Lösungen:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}$$

Daher haben die Lösungen die Form:

$$z_1 = e^{i\varphi_1} = 1, z_2 = e^{i\varphi_2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{i\varphi_3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(b) Zuerst bemerken wir:

$$z^2 - 2iz - 1 = (z - i)^2,$$

somit suchen wir Lösungen der Gleichung:

$$(z - i)^2 = i$$

Setzen wir $w = z - i = re^{i\varphi}$, so ist die Gleichung:

$$w^2 = r^2 e^{2\varphi i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

Abermals ist $r = 1$ klar aufgrund von $r \geq 0$ und wegen der Periodizität finden wir:

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es existieren also bis auf Addieren eines ganzen Vielfachen von 2π die folgenden zwei Lösungen für φ:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Die Lösungen sind daher:

$$z_1 = i + e^{i\varphi_1} = i + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, z_2 = i + e^{i\varphi_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}i$$

(c) Wir sehen problemlos, dass die Polarkoordinatenform von $1+i$ gerade wie folgt ist:

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Setzen wir $z = re^{i\varphi}$, so reduziert sich die Gleichung zu:

$$r^5 = \sqrt{2}, 5\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$. Somit finden wir:

$$r^5 = \sqrt{2} \ \Rightarrow \ r = \sqrt[10]{2},$$

sowie:

$$\varphi_j = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi(j-1)}{5}, \quad \forall j \in \{1,2,3,4,5\}$$

Für andere Werte k erhalten wir nur dieselben fünf Lösungen bis auf Addition eines Vielfachen von 2π. Die Lösungen sind also:

$$z_j = \sqrt[10]{2}e^{i(\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi(j-1)}{5})}, \quad \forall j \in \{1,2,3,4,5\}$$

(d) $z^5 = 2z$ Zuerst bemerken wir, dass $z_0 = 0$ eine Lösung ist. Falls $z \neq 0$ eine Lösung ist, so muss gelten:

$$z^4 = 2$$

Durch $z = r \cdot e^{i\varphi}$ finden wir die folgenden äquivalenten Gleichungen:

$$r^4 = 2, \quad 4\varphi = 2\pi k,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$. Man beachte, dass wir $2 = 2 \cdot e^{i0}$ benutzt haben. Aufgrund der Periodizität des Exponentials modulo $2\pi i$ existieren 4 Lösungen:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \varphi_3 = \pi, \varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$$

Ferner gilt $r = \sqrt[4]{2}$. Somit sind die Lösungen gerade:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i0} = \sqrt[4]{2}, z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{2}i, z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[4]{2}, z_4 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt[4]{2}i$$

Zusammen mit $z_0 = 0$ sind dies genau die fünf Lösungen der Gleichung.

9.2. Tangenten an Graph

Wir bemerken, dass gemäss Definition 5.1.3 gilt für die Tangente an f im Punkt x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

wobei wir $y_0 = f(x_0)$ verwendet haben. Umformen ergibt daher:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

daher gilt:

$$m = f'(x_0), \quad q = f(x_0)$$

(a) Die Funktion ist differenzierbar. Wir berechnen:

$$\sin'(0) = \cos(0) = 1, \sin(0) = 0,$$

also ist die Tangente:

$$y = 1 \cdot (x - 0) + 0 = x$$

(b) Die Funktion ist als Polynom differenzierbar. Wir sehen:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6, f(3) = 9,$$

also hat die Tangente die Gleichung:

$$y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$$

(c) Die Exponentialfunktion ist differenzierbar. Einsetzen ergibt:

$$f'(1) = e^1 = e, f(1) = e^1 = e,$$

also finden wir für die Tangente:

$$y = e(x - 1) + e = e \cdot x$$

(d) Da $1 + x^2 \geq 1 > 0$ folgt, dass die Funktion dank der Quotientenregel und der Differenzierbarkeit von Polynomen ebenfalls differenzierbar ist. Die Ableitung ist gemäss Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

Somit finden wir:

$$f'(-1)\frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, f(-1) = \frac{1}{2},$$

somit hat die Tangente die Gleichung:

$$y = \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + 1$$

9.3. Ableitungen der hyperbolischen Funktionen

(a) Wir wissen, dass:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Wir betonen hier, dass diese Darstellung erst beweist, dass die Funktionen $\sinh, \cosh$ differenzierbar sind. Somit, dank $(e^x)' = e^x$ finden wir:

$$\sinh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Ähnlich finden wir:

$$\cosh'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

(b) Dank der Quotientenregel finden wir (man beachte, dass $\cosh(x) \geq 1$ auf $\mathbb{R}$):

$$\tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh(x)^2} = \frac{\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2}{\cosh(x)^2} = \frac{1}{\cosh(x)^2},$$

wobei wir die bereits bewiesene Identität $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ benutzt haben.

(c) Dank einer vorherigen Serie wissen wir, dass sinh bijektiv ist, also existiert $\sinh^{-1}$. Zudem gilt:

$$\sinh(\sinh^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Prop. 5.1.6 zeigt, dass also $\sinh^{-1}$ differenzierbar ist. Leiten wir nun beide Seiten ab, so sehen wir für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1 &= \sinh^{-1\prime}(x) \cdot \sinh'(\sinh^{-1}(x)) \\ &= \sinh^{-1\prime}(x) \cdot \cosh(\sinh^{-1}(x)) \\ &= \sinh^{-1\prime}(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh(\sinh^{-1}(x))^2} \\ &= \sinh^{-1\prime}(x) \cdot \sqrt{1 + x^2} \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir hier $\cosh(x) \geq 1$ sowie $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ benutzt haben, um den cosh zu ersetzen und schliesslich die Wurzel zu wählen. Somit finden wir nun nach einer letzten Umformung:

$$\sinh^{-1\prime}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

9.4. Rechenregeln für Ableitungen

Differenzierbarkeit lässt sich in jedem Fall mittels der Kettenregel sowie Produkt-/Quotienten- und Summenregel angewandt auf einfache Funktionen wie Polynome, Exponentialfunktion, Logarithmus, etc. bestimmen. Man beachte, dass zu prüfen ist, ob der Nenner bei Quotienten verschwindet, da dies sonst eine Stelle ist, an der Differenzierbarkeit nicht gegeben ist. Zudem muss man sich überzeugen, dass in log keine Zahlen ≤ 0 eingesetzt werden.

(a) Der Ausdruck $\log(\sin x)$ ist für $x \in (0, \pi)$ wohldefiniert, da dann $\sin(x) > 0$ gilt. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin(x))) = \frac{1}{\sin(x)} \sin'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(b) Wir schreiben $a^x = e^{x \log(a)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \log(a) e^{x \log(a)} = \log(a) a^x.$$

(c) Es gilt $x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \left[\frac{d}{dx}(x \log x)\right] e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x) x^x.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}) &= 7 \cdot 9x^6 + (-5)3x^{-6} - (-11)3x^{-12} \\ &= 63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12}. \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden zuerst die Kettenregel und dann die Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{(2x-3)(x^2 - 7x + 12) - (x^2 - 3x + 2)(2x - 7)}{(x^2 - 7x + 12)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 7x + 12)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-4x^2 + 20x - 22)}{(x^2 - 7x + 12)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 10x - 11}{(x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{2}} (x^2 - 7x + 12)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

(f) Mit den Beziehungen

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

und der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}(\log(\cosh x)) = \frac{\frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x.$$

(g) Mit der Kettenregel folgt:

$$\frac{d}{dx}(\log(\log(\log x))) = \frac{1}{\log(\log x)} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \log x \cdot \log(\log x)}.$$

(h) Es gilt $a^b = e^{b \log a}$. Daher ist $3^x = e^{x \log 3}$ und es folgt

$$\frac{d}{dx}(3^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \log 3}) = (\log 3) e^{x \log 3} = (\log 3) 3^x.$$

Mit der Produktregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 3^x x^3 &= 3^x \cdot 3x^2 + (\log 3) 3^x x^3 \\ &= 3^x x^2 (3 + x \log 3). \end{aligned}$$