10.1. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 1

(a) Direktes Ausrechnen mittels Produktregel zeigt:

$$g'(x) = f'(x)e^{-Cx} - Cf(x)e^{-Cx}$$

Man beachte, dass diese Formel für alle $C \in \mathbb{R}$ gilt, sogar für $C = 0$.

(b) Gemäss der Annahme wissen wir, dass für $g_K(x) := f(x)e^{-Kx}$ und $g_k(x) := f(x)e^{-kx}$ folgende Ungleichungen auf $]0,1[$ gelten:

$$g'_K(x) \leq 0 \leq g'_k(x)$$

Damit ist g_K monoton fallend auf $[0,1]$, während g_k monoton wachsend ist dank des Monotonie-Kriteriums aus der Vorlesung. Daher gilt:

$$f(0) = g_K(0) \geq g_K(x) = f(x)e^{-Kx} \Rightarrow f(x) \leq f(0)e^{Kx}, \quad \forall x \in [0,1]$$

Ganz analog lässt sich die untere Schranke aus g_k herleiten.

(c) Wenn $k = K$, so finden wir gemäss der Ungleichung in der vorherigen Aufgabe:

$$f(0)e^{Kx} \leq f(x) \leq f(0)e^{Kx}, \quad \forall x \in [0,1]$$

Dies impliziert nun $f(x) = f(0)e^{Kx}$ dank der Gleichheit zwischen oberer und unterer Schranke.

10.2. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 2

(a) Dies ist eine einfache Konsequenz der Umordnung der Ungleichung.

(b) g ist stetig auf $[0, \pi/2]$ und erreicht somit dort sein Minimum. Dies kann entweder in $0, \pi/2$ oder einem inneren Punkt des Intervalls angenommen werden. Für $x = 0, \pi/2$ finden wir:

$$g(x) = 0,$$

also wenn $g(x) \leq 0$ an einer Stelle x im Inneren des Intervalls ist, so erreicht es auch sein Minimum im Inneren. Dank eines Theorems aus der Vorlesung wissen wir, dass wenn g sein Extremum in einem Punkt $x \in]0, \pi/2[$ annimmt, dann gilt dort:

$$g'(x) = 0$$

Nun können wir aber berechnen, dass wenn g in x_0 ein Extremum hat, so gilt:

$$g'(x_0) = \cos(x_0) - \frac{2}{\pi} = 0 \Rightarrow \cos(x_0) = \frac{2}{\pi} > 0$$

Wir beachten, dass für alle $x < x_0$ gilt:

$$g'(x) > g'(x_0) = 0,$$

da $\cos(x)$ auf $[0, \pi]$ monoton fallend ist. Ferner finden wir durch analoge Argumentation für alle $x > x_0$:

$$g'(x) < g'(x_0) = 0$$

Dank des Monotonie-Kriteriums können wir also folgern, dass g auf $[0, x_0]$ monoton wachsend und auf $[x_0, \pi/2]$ monoton fallend ist. Somit muss x_0 zwangsläufig ein lokales Maximum sein und kann nicht das globale Minimum werden. Daher ist das Minimum von g in $x = 0$ und $x = \pi/2$ und somit 0. Das Minimum kann gemäss unserer Argumentes nicht in $]0, \pi/2[$ angenommen werden, also finden wir:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

(c) Die finale Ungleichung der letzten Teilaufgabe beinhaltet die notwendige Aussage.

10.3. Newton-Verfahren

(a) Es gilt $f(0) = e^0 - 2 = -1$ sowie $f(1) = e^1 - 2 > 0$. Da f stetig ist als Komposition stetiger Funktionen, besitzt f also gemäss Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[0, 1]$.

(b) Dank Aufgabe 9.2 in Serie 9 wissen wir, dass:

$$t_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Setzen wir $f(x) = e^x - 2$ ein, so finden wir:

$$t_{x_0}(x) = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0} - 2$$

(c) Wir wollen für ein gegebenes $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) \neq 0$ die folgende Gleichung lösen:

$$0 = t_{x_0}(x) = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0} - 2$$

Umformen und auflösen ergibt:

$$x = x_0 - 1 + 2e^{-x_0}$$

Vergleichen wir dies mit der Formel für das Newton-Verfahren aus Example 5.4.11.2, so sehen wir:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - 1 + 2e^{-x_0}$$

Die Formeln sind also identisch.

Wir wollen nun noch beweisen, dass $x \in [0,1]$. Dazu bestimmen wir das Maximum und Minimum der Funktion $g(x) := x - 1 + 2e^{-x}$ auf $[0,1]$. Man beachte, dass dies gerade die Formel für die Nullstellen ist und somit, wenn das Maximum ≤ 1 und das Minimum ≥ 0 ist auf $[0,1]$, so haben wir die gewünschte Aussage bewiesen. Gemäss Extremumsatz nimmt g sein Maximum und Minimum an. Kandidaten hierfür sind die Randpunkte $0,1$ sowie alle Stellen y mit $g'(y) = 0$. Wir bemerken:

$$g(0) = -1 + 2 = 1, \quad g(1) = 1 - 1 + 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1,$$

also genügt es, die Ungleichungen noch für kritische Punkte in $]0,1[$ zu prüfen. Beachte:

$$g'(x) = 1 - 2e^{-x}$$

Es besitzt g' also diesselbe Nullstelle wie f und wegen der strikten Monotonie der Funktion ist diese sogar eindeutig (dasselbe gilt natürlich auch für f!). Setzen wir y_0 in g ein, so sehen wir:

$$1 \geq g(y_0) = y_0 - 1 + 2e^{-y_0} = y_0 - g'(y_0) = y_0 \geq 0,$$

da $y_0 \in]0,1[$. Somit wissen wir, dass die Nullstellen stets in $[0,1]$ liegen.

(d) Gemäss der letzten Teilaufgabe ist $x_n \in [0,1]$ wohldefiniert. Wir sehen:

$$t_{x_0}(x) \leq f(x),$$

für alle $x, x_0 \in [0,1]$. Dies ist klar, wenn man die Funktion und die Tangenten skizziert und lässt sich beweisen, indem man die Aufgabe 5.4 aus Schnellübung 5 verwendet und entsprechend anpasst, um die Ungleichung auf beiden Seiten von x_0 zu erhalten. Somit sehen wir aber auch, dass wenn x die Nullstelle von t_{x_0} ist:

$$0 = t_{x_0}(x) \leq e^x \ - 2 \ \Rightarrow 2 \leq e^x$$

Dies beweist, dass $e^{x_n} \geq 2$. Daraus folgern wir:

$$x_{n+1} = x_n - 1 + 2e^{-x_n} \leq x_n - 1 + \frac{2}{2} = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei wir $e^{x_1} = e \geq 2$ im Fall $n = 1$ verwenden. Daher ist (x_n) monoton fallend und beschränkt (da alle Folgeglieder in $[0,1]$ liegen).

(e) Da die Folge x_n beschränkt und monoton ist, konvergiert diese mit Grenzwert x_0. Zudem konvergiert wegen der Stetigkeit von f und f' auch die Folge $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ und $f'(x_n)$ gegen $f'(x_0)$. Da $f'(y) > 0$ für alle $y \in [0, 1]$, sehen wir mittels der Rechenregeln für Grenzwerte:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \Big(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Big) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

und somit:

$$0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \;\Rightarrow\; f(x_0) = 0,$$

wobei wir $f'(x_0) > 0$ verwendet haben. Daher gilt auch:

$$e^{x_0} = 2 \;\Rightarrow\; x_0 = \log(2),$$

gemäss der Definition von log.

(f) Einsetzen ergibt:

$$x_2 = 0.7358, x_3 = 0.694, x_4 = 0.6931, x_5 = 0.6931$$

Zum Vergleichen, wissen wir:

$$\log(2) \simeq 0.69314718...$$

10.4. Ableitungen höherer Ordnung

Wir benutzen die Leibniz-Formel aus Lemma 5.5.6 für höhere Ableitungen: Man bemerke, dass $f(x) = g(x)h(x)$, wobei:

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = e^{2x}$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass für beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}, \quad h^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$$

Setzen wir dies nun in Lemma 5.5.6 ein, so finden wir:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(x) h^{(k-j)}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(-1)^j j! \cdot 2^{k-j} e^{2x}}{x^{j+1}} \end{aligned}$$