11.1. Höhere Ableitungen

(a) Dank der Ketten- und Produktregel finden wir:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos(x)^2 e^{\sin(x)} \\
&= (-\sin(x) + \cos(x)^2)e^{\sin(x)} \\
f''(x) &= -\cos(x)e^{\sin(x)} - \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)} - 2\cos(x)\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos(x)^3 e^{\sin(x)} \\
&= (-\cos(x) - 3\cos(x)\sin(x) + \cos(x)^3)e^{\sin(x)} \\
f'''(x) &= (\sin(x) + 3\sin(x)^2 - 4\cos(x)^2 - 6\cos(x)^2\sin(x) + \cos(x)^4)e^{\sin(x)} \\
f^{(4)}(x) &= (1 + 15\sin(x) + 15\sin(x)^2 - 10\cos(x)^2 - 10\cos(x)^2\sin(x) + \cos(x)^4)\cos(x)e^{\sin(x)}
\end{aligned}$$

(b) Abermals unter Verwendung der Ketten- und Produkt/Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\
f''(x) &= -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{12(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}
\end{aligned}$$

(c) Wie in den vorherigen Teilaufgaben finden wir unter Verwendung der üblichen Rechenregeln zu Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x - x)\ \cos(x) - (e^x + 1)\sin(x) \\
f''(x) &= (x - 2e^x)\sin(x) - 2\cos(x) \\
f'''(x) &= (3 - 2e^x)\sin(x) + (x - 2e^x)\cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= -x\sin(x) - 4(e^x - 1)\cos(x)
\end{aligned}$$

11.2. Konvexität

(a)
- Zumal die Funktion beliebig oft differenzierbar ist als Komposition solcher Funktionen, reicht es gemäss des Konvexitätskriteriums aus der Vorlesung das Vorzeichen der zweiten Ableitung zu bestimmen. Aus der vorherigen Aufgabe wissen wir:

$$(\log(1+x^2))'' = -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

Somit finden wir an der Stelle $x = 2$:

$$-\frac{6}{25} < 0,$$

und somit ist die Funktion nicht überall konvex. Tatsächlich lässt sich so sehen, dass die Funktion genau auf $[-1, 1]$ konvex ist.

- Dank des Konvexitätskriteriums aus der Vorlesung und der Differenzierbarkeit des Logarithmus reicht es, die zweite Ableitung zu bestimmen:

  $$(\log(x)^2)'' = \frac{2}{x^2} - \frac{2\log(x)}{x^2} = \frac{2 - 2\log(x)}{x^2}$$

  Die zweite Ableitung ist daher genau dann nicht-negativ, wenn:

  $$1 - \log(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; e \geq x,$$

  somit ist die Funktion auf $]0, e]$ konvex, aber nicht auf $]0, \infty[$.

- Man bemerke, dass gilt:

  $$-x^2 \leq x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  Daher ist:

  $$\max\{x^2, -x^2\} = x^2$$

  Diese Funktion ist aber trivialerweise konvex, da die zweite Ableitung konstant $2 > 0$ ist.

(b) Man betrachte als Beispiel die Funktionen $f(x) = x, g(x) = -x$. Die zweiten Ableitungen dieser Funktionen verschwinden, sind sie konvex. Allerdings ist $fg(x) = f(x)g(x) = -x^2$ und diese Funktion ist nicht konvex. Damit haben wir das gewünschte Gegenbeispiel gefunden.

(c) Man bemerke, dass gilt:

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

Da beide Funktionen konvex sind, gilt:

$$f''(x), g''(x) \geq 0$$

Zudem aufgrund der Monotonie:

$$f'(x), g'(x) \geq 0$$

Daher gilt:

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \geq 0,$$

somit ist fg gemäss des Konvexitätskriteriums konvex.

11.3. Konvexität und Tangenten

(a) Wir bestimmen zuerst ein $\lambda \in [0,1]$ mit:

$$y = \lambda x + (1-\lambda)z$$

Somit gilt:

$$\lambda(z-x) = z-y \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{z-y}{z-x}$$

Somit folgt aus der Konvexität der Funktion f:

$$f(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$$

Setzen wir nun λ wie oben bestimmt ein und formen um, so finden wir:

$$\lambda(f(z)-f(x)) \leq (f(z)-f(y)) \;\Rightarrow\; \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Um die andere Ungleichung zu erhalten, bemerken wir:

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= \frac{f(z)-f(x)}{y-x} - \frac{f(z)-f(y)}{y-x} \\
&\leq \frac{f(z)-f(x)}{y-x} - \frac{(f(z)-f(x))(z-y)}{(z-x)(y-x)} \\
&= \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\left(\frac{z-x}{y-x} - \frac{z-y}{y-x}\right) \\
&= \frac{f(z)-f(x)}{z-x},
\end{aligned}$$

wobei wir die bereits bekannte Ungleichung verwendet haben.

(b) Man bemerke, dass nach Umordnen die gewünschte Ungleichung die folgende Form hat für $x > x_0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'(x_0),$$

sowie für $x < x_0$ (aufgrund der Division durch eine negative Zahl):

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'(x_0)$$

Man bemerke, dass die Tangentenungleichung für $x = x_0$ trivial ist, somit können wir $x \neq x_0$ annehmen. Zudem beschränken wir und auf $x > x_0$, der andere Fall lässt sich komplett analog lösen. In diesem Fall finden wir für jedes $y \in]x_0, x[$:

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Dies ist eine klare Konsequenz der vorherigen Teilaufgabe. Lassen wir nun y gegen x_0 konvergieren, so gilt:

$$\lim_{y\to x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} = f'(x_0)$$

Daher, dank der Abschätzung oben können wir sofort schliessen:

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Das ist die gewünschte Aussage.

11.4. Taylorpolynome

- Für $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ finden wir gemäss Definition 5.7.1:

$$T_4 f(x;0) = 1 + \frac{1}{1!}x - \frac{3}{3!}x^3 - \frac{8}{4!}x^4 = 1 + x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4$$

- Für $f(x) = \log(1+x^2)$ finden wir gemäss Definition 5.7.1:

$$T_4 f(x;0) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{12}{4!}x^4 = x^2 - \frac{1}{2}x^4$$

- Für $f(x) = e^x\cos(x) - x\sin(x)$ finden wir gemäss Definition 5.7.1:

$$T_4 f(x;0) = 1 + \frac{1}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 = 1 + x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

11.5. Grenzwerte und Taylorpolynome

- Wir sehen dank der Restgliedformel:

$$\log(1+x) = x + xr(x),$$

  wobei $r(x)$ gegen 0 konvergiert, wenn $x \to 0$. Somit gilt:

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x+xr(x)}{x} = 1 + r(x),$$

  und wir finden daher den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + r(x) = 1$$

- Da $\cos(2x)$ eine Potenzreihe ist, lässt sich das Taylorpolynom 4.Ordnung von $\cos(2x) - 1 - 2x^2$ leicht bestimmen:

  $$\cos(2x) - 1 + 2x^2 = \frac{2^4}{4!}x^4 + x^4 r_1(x) = \frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x),$$

  wobei $r_1(x) \to 0$, falls $x \to 0$ dank der Restgliedformel für Taylorpolynome. Zudem gilt:

  $$\sin(x) = x + x r_2(x),$$

  und somit:

  $$x \sin(x)^3 = x^4(1 + r_2(x))^3,$$

  wobei auch hier $r_2(x) \to 0$, wenn $x \to 0$. Daher können wir sehen:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x \sin(x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x)}{x^4(1 + r_2(x))^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3} + r_1(x)}{(1 + r_2(x))^3} = \frac{2}{3}$$

- Wir bemerken zuerst:

  $$\cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\frac{1}{x}\log(\cos(x))\Big)$$

  Da die Exponentialfunktion stetig ist, reicht es den folgenden Grenzwert zu bestimmen:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x}$$

  Wir bestimmen das Taylorpolynom des Zählers: Der erste Koeffizient lässt sich durch Einsetzen bestimmen:

  $$\log(\cos(0)) = \log(1) = 0,$$

  Durch Ableiten finden wir zudem:

  $$\Big(\log(\cos(x))\Big)' = -\frac{1}{\cos(x)}\sin(x)$$

  Somit ist die Ableitung in $x = 0$ gerade 0. Daher folgt mittels der Restgliedformel:

  $$\log(\cos(x)) = 0 + \frac{0}{1!}x + x r(x) = x r(x),$$

  wobei $r(x) \to 0$ wenn $x \to 0$ dank der Taylorformel. Daher berechnen wir:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x r(x)}{x} = \lim_{x\to 0} r(x) = 0,$$

  und somit dank der Stetigkeit:

  $$\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp(0) = 1$$