12.1. Stammfunktionen

(a) Wir sehen dank Prop. 6.1.4.(2):

$$\begin{aligned}\int \sin(x)^2 dx &= \int (-\cos(x)' \sin(x) dx \\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos(x)(\sin(x))' dx \\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos(x)^2 dx \\ &= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin(x)^2 dx\end{aligned}$$

und somit:

$$2\int \sin(x)^2 dx = -\ \cos(x)\sin(x) + x + 2C,$$

daher auch:

$$\int \sin(x)^2 dx = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(b) Durch wiederholtes Anwenden von Prop. 6.1.4.(2) sehen wir:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^x dx &= \int (-\cos(x))' e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \int (\sin(x))' e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx\end{aligned}$$

Löst man dies nun nach der Stammfunktion auf, so sehen wir:

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(c) Gemäss der Kettenregel ist klar, dass $e^{\sin(x)}$ eine Stammfunktion ist, siehe auch Prop. 6.1.6. Daher gilt:

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} dx = e^{\sin(x)} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(d) Durch wiederholtes Anwenden von Prop. 6.1.4.(2) sehen wir:

$$\begin{aligned}\int \sinh(x)\cos(x)dx &= \cosh(x)\cos(x) + \int \cosh(x)\sin(x)dx \\ &= \cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x) - \int \sinh(x)\cos(x)dx,\end{aligned}$$

und somit:

$$\int \sinh(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\Big(\cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x)\Big) + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

12.2. Stammfunktionen per Rekursion berechnen

Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktionen zu folgenden Funktionen:

$$\cos(x)^n, x^n e^x, \log(x)^n$$

Zuerst bemerken wir, dass für $n = 1$ gilt:

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C, \int xe^x dx = xe^x - e^x + C, \int \log(x)dx = x\log(x) - x + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Dies folgt gemäss den bekannten Ableitungen und Formeln aus der Vorlesung. Für $n = 2$ haben wir dank partieller Integration analog zu 12.1.(a):

$$\int \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2} + C$$

Ferner findet man auch, mittels analogen Überlegungen wie im Fall $n = 1$:

$$\int \log(x)^2 dx = x\log(x)^2 - 2x\log(x) + 2x + C, \int x^2 e^x dx = x^2 e^2 - 2xe^x + 2e^x + C$$

Wie im Hinweis vorgeschlagen, wollen wir nun Prop. 6.1.4.(2) verwenden, um induktiv die Stammfunktionen für $n \geq 2$ zu bestimmen. Es gilt für $n \geq 2$ dank partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int \cos(x)^n dx &= \int (\sin(x))' \cos(x)^{n-1} dx \\ &= \sin(x)\cos(x)^{n-1} + (n-1)\int \sin(x)^2 \cos(x)^{n-2} dx \\ &= \sin(x)\cos(x)^{n-1} + (n-1)\int \cos(x)^{n-2} dx - (n-1)\int \cos(x)^n dx,\end{aligned}$$

und die elementare Umformungen zeigen:

$$\int \cos(x)^n dx = \frac{1}{n}\sin(x)\cos(x)^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int \cos(x)^{n-2}dx$$

Dies erlaubt uns nun, die folgenden Formeln leicht herzuleiten:

$$\begin{aligned}
\int \cos(x)^3 dx &= \frac{1}{3}\sin(x)\cos(x)^2 + \frac{2}{3}\sin(x) + C \\
\int \cos(x)^4 dx &= \frac{1}{4}\sin(x)\cos(x)^3 + \frac{3}{8}\sin(x)\cos(x) + \frac{3}{8}x + C \\
\int \cos(x)^5 dx &= \frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4 + \frac{4}{15}\sin(x)\cos(x)^2 + \frac{8}{15}\sin(x) + C \\
\int \cos(x)^6 dx &= \frac{1}{6}\sin(x)\cos(x)^5 + \frac{5}{24}\sin(x)\cos(x)^3 + \frac{15}{48}\sin(x)\cos(x) + \frac{15}{48}x + C
\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir eine Rekursionsformel für $\log(x)^n$ bestimmen, wobei wir denselben Trick wie für $n = 1, 2$ mittels partieller Integration verwenden:

$$\begin{aligned}
\int \log(x)^n dx &= \int (x)' \log(x)^n dx \\
&= x\log(x)^n - \int x \cdot n \log(x)^{n-1}\frac{1}{x}dx \\
&= x\log(x)^n - n\int \log(x)^{n-1}dx
\end{aligned}$$

Diese Rekursionsformel muss nicht mehr umgeformt werden. Hieraus können wir bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int \log(x)^3 dx &= x(\log(x)^3 - 3\log(x)^2 + 6\log(x) - 6) + C \\
\int \log(x)^4 dx &= x(\log(x)^4 - 4\log(x)^3 + 12\log(x)^2 - 24\log(x) + 24) + C \\
\int \log(x)^5 dx &= x\left(\sum_{k=0}^{5}(-1)^{5-k}\frac{5!}{k!}\log(x)^k\right) + C \\
\int \log(x)^6 dx &= x\left(\sum_{k=0}^{6}(-1)^{6-k}\frac{6!}{k!}\log(x)^k\right) + C
\end{aligned}$$

wobei wir hier einfachheitshalber $\log(x)^0 = 1$ definieren (obwohl $0^0 = \log(1)^0$ nicht wohldefiniert ist). Im Allgemeinen kann man sogar induktiv zeigen:

$$\int \log(x)^n dx = x\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\log(x)^k\right) + C,$$

für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Zuletzt sehen wir, dass abermals dank Prop. 6.1.4.(2) gilt:

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx$$

Daher, wenn wir definieren:

$$I_n := \int x^n e^x dx,$$

so finden wir die Rekursionsformel:

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass (unter Verwendung der Rekursionsformel und unserer obigen Berechnungen):

$I_0 = e^x + C, I_1 = (x-1)e^x + C, I_2 = (x^2 - 2x + 2)e^x + C, I_3 = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C,$

für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$. Dies führt uns zu der folgenden Vermutung:

$$I_n = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^k \Big) e^x + C$$

Diese Formel ist korrekt für $n = 0, 1, 2, 3$ wie oben gesehen. Um die Identität per Induktion zu beweisen, genügt es also, zu zeigen, dass die Formel für I_n gilt, sofern sie für I_{n-1} korrekt ist. Dies führt und zu:

$$\begin{aligned}
I_n &= x^n e^x - n I_{n-1} \\
&= x^n e^x - n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k} (n-1)!}{k!} x^k \Big) e^x + C \\
&= \frac{(-1)^{n-n} n!}{n!} x^n e^n + \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^k \Big) e^x + C \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^k \Big) e^x + C
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. Zumal wir eigentlich nur an I_n für $n \leq 6$ finden sollen, würde es auch reichen, die Rekursionsformel zu verwenden, um folgende Ausdrücke zu finden:

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^x dx &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C \\
\int x^4 e^x dx &= (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)e^x + C \\
\int x^5 e^x dx &= (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C \\
\int x^6 e^x dx &= (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720)e^x + C
\end{aligned}$$

12.3. Integrale berechnen per Definition

(a) Wir wählen die Stufenfunktionen $f_n(x)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \dots n\}$ gilt:

$$f_n(x) = \frac{k^2}{n^2} = \Big(\frac{k}{n}\Big)^2, \forall x \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}],$$

Gemäss Theorem 6.2.7 konvergiert diese Folge von Funktionen gleichmässig gegen f. Daher gilt:

$$\int_0^1 x^2 dx = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

Gemäss Aufgabe 1.3.(a) gilt:

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}{n^3} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

wenn $n \to \infty$. Daher können wir folgern:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(b) Wir wählen die Stufenfunktionen $f_n(x)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \dots n\}$ gilt:

$$f_n(x) = \frac{k^3}{n^3} = \Big(\frac{k}{n}\Big)^3, \forall x \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}],$$

Gemäss Theorem 6.2.7 konvergiert diese Folge von Funktionen gleichmässig gegen f. Daher gilt:

$$\int_0^1 x^3 dx = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$$

Dank Aufgabe 1.3.(b) wissen wir:

$$\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{\frac{1}{4} n^2(n+1)^2}{n^4} \to \frac{1}{4},$$

für $n \to \infty$. Daher folgern wir:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

12.4. Partialbruchzerlegung

(a) Bringen wir beide Summanden auf einen gemeinsamen Nenner, so sehen wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{Ax-2A}{(x-1)(x-2)} + \frac{Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Die gesuchten Konstanten A, B müssen also folgendes lineares System erfüllen:

$$A+B=0, \quad 2A+B=-1$$

Direktes Ausrechnen zeigt:

$$A=-1, B=1$$

Somit gilt also:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

(b) Unser Vorgehen der letzten Teilaufgabe ergibt sofort:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Somit sind die gesuchten Gleichungen:

$$A+B=1, \quad 2A+B=-1$$

Auflösen ergibt sofort:

$$A=-2, B=3$$

Daher ist die gesuchte Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

(c) Wie im Hinweis verwenden wir zuerst Polynomdivision, um die Zerlegung zu vereinfachen. Hierzu bemerken wir:

$$x^3 = (x+3)(x^2-3x+2) + 7x - 6$$

Dies lässt sich einfach aus einer Division mit Rest herauslesen. Daher gilt:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-1)(x-2)+7x-6}{(x-1)(x-2)} = x+3+\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}$$

Somit ist $C=1, D=3$. Für A, B gehen wir vor wie bereits zuvor und finden das System:

$$A+B=7, \quad 2A+B=6$$

Somit muss gelten:

$$A = -1, B = 8$$

Daher haben wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2}$$

(d) Wir finden durch Erweitern:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + (4A+2B-C)}{(x-1)(x-2)^2}$$

Das gesuchte Gleichungssystem ist hier also:

$$\begin{aligned}
0 &= A + B \\
0 &= -4A - 3B + C \\
1 &= 4A + 2B - C
\end{aligned}$$

Auflösen zeigt sofort:

$$A = 1, B = -1, C = 1$$

Somit haben wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

Da alle drei Konstanten $\neq 0$ sind, folgt, dass alle drei Summanden nötig waren.

(e) Einer der grossen Nutzen von Partialbruchzerlegungen besteht darin, dass sie die Bestimmung von Stammfunktionen signifikant vereinfachen:

- Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

  Da $\log(x)$ eine Stammfunktion zu $1/x$ ist, finden wir:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = -\log(|x-1|) + \log(|x-2|) + C,$$

  für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass der Absolutbetrag verwendet wird, damit wir überall auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ eine Stammfunktion haben.

- Aus der zweiten Teilaufgabe wissen wir:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

Somit folgt, analog zu vorhin:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} dx = -2\log(|x-1|) + 3\log(|x-2|) + C,$$

für eine beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

- Dank unserer Partialbruchzerlegung wie oben gilt:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2},$$

und daher:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \log(|x-1|) + 8\log(|x-2|) + C,$$

für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

- $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$ Aus den obigen Berechnungen ist klar, dass:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2},$$

und daher ist sind die Stammfunktionen gegeben durch:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} dx = \log(|x-1|) - \log(|x-2|) - \frac{1}{x-2} + C,$$

für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$.