13.1. Integration I

(a) Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x+1} + \frac{\omega_3}{x-1}$$

und erhalten

$$\omega_1(x^2-1) + \omega_2 x(x-1) + \omega_3 x(x+1) = 1\,,$$

d.h.

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_1 = 1\,. \end{cases}$$

Die Lösungen des Systems sind

$$\omega_1 = -1\,,\ \ \omega_2 = \frac{1}{2}\,,\ \ \omega_3 = \frac{1}{2}\,,$$

und deshalb erhalten wir

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} \overset{\text{(PBZ)}}{=} -\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{dx}{x^3-x} &= -\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= -\ln x\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\ln(x-1)\Big|_{x=2}^{x=3} \\
&= -\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{2} = \ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right) \\
&= \ln\sqrt{\frac{32}{27}}
\end{aligned}$$

(b) Für den Nenner gilt

$$x^2 - 2x - 63 = (x+7)(x-9)$$

und daher bestimmen wir A, B so dass

$$\frac{4x-2}{(x+7)(x-9)} = \frac{A}{x-9} + \frac{B}{x+7}.$$

Wir erhalten

$$4x-2 = A(x+7) + B(x-9).$$

Einsetzen von $x=-7$, bzw. $x=9$ liefert

$$-30 = -16B \quad \Rightarrow B = 15/8$$

und

$$34 = 16 \cdot A \quad \Rightarrow A = 17/8.$$

Also gilt

$$\frac{4x-2}{x^2-2x-63} = \frac{17/8}{x-9} + \frac{15/8}{x+7}.$$

Das Integral ist damit

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx &= \int \frac{17/8}{x-9}dx + \int \frac{15/8}{x+7}dx \\ &= \frac{17}{8}\log(|x-9|) + \frac{15}{8}\log(|x+7|) + c.\end{aligned}$$

(c) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}\,.$$

Das liefert nun

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

und somit das System

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 1\,. \end{cases}$$

d.h. $a = 2$ und $b = -3$. Wir bekommen deshalb

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{(x+2)^2}\,dx \\ &= 2\log|x+2| + \frac{3}{x+2} + C.\end{aligned}$$

(d) Wir faktorisieren den Nenner und bekommen

$$(x^2-9)^2 = [(x-3)(x+3)]^2 = (x-3)^2(x+3)^2 \,.$$

Weil die Nullstellen 3 und -3 Multiplizität 2 besitzen, folgt, dass wir den Ansatz

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$$

machen müssen, wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind.

Somit erhalten wir

$$\frac{A(x-3)(x+3)^2 + B(x+3)^2 + C(x-3)^2(x+3) + D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

und

$$(A+C)x^3+(3A+B-3C+D)x^2+(-9A+6B-9C-6D)x+(-27A+9B+27C+9D) = x^2 \,,$$

was uns das System

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B-3C+D=1 \\ -9A+6B-9C-6D=0 \\ -27A+9B+27C+9D=0 \end{cases}$$

liefert. Das System besitzt die Lösungen

$$A=\frac{1}{12},\ B=\frac{1}{4},\ C=-\frac{1}{12},\ D=\frac{1}{4}$$

und deshalb ist die gesuchte Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{12(x-3)} + \frac{1}{4(x-3)^2} - \frac{1}{12(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2} \,.$$

Mit der Partialbruchzerlegung folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}\,dx &= \int \frac{1}{12(x-3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x-3)^2}\,dx \\ &\quad - \int \frac{1}{12(x+3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x+3)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{12}\log(|x-3|) - \frac{1}{4(x-3)} \\ &\quad - \frac{1}{12}\log(|x+3| - \frac{1}{4(x+3)} + C \end{aligned}$$

(e) Zunächst zerlegen wir die gegebene rationale Funktion durch Polynomdivion in die Summe eines Polynoms $p(x)$ und eines rationalen Anteils $r(x)$, so dass der Grad des Zählers von $r(x)$ kleiner ist als der Grad des Nenners. Wir erhalten

$$(x^{10} - x^7 + 3x) : (x^3 - 1) = x^7 + \frac{3x}{x^3 - 1}\,.$$

Wir faktorisieren den Nenner von $r(x) = \frac{3x}{x^3-1}$ und bekommen

$$r(x) = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

In diesem Fall wird der Ansatz durch

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

gegeben. Somit erhalten wir

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c}{x^3-1}$$

und das System

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b + c = 3 \\ a - c = 0\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen

$$a = 1,\ b = -1,\ c = 1$$

sind. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{x^{10} - x^7 + 3x}{x^3 - 1} = x^7 + \frac{1}{x-1} + \frac{1-x}{x^2+x+1}\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{10} - x^7 + 3x}{x^3-1}\,dx &= \int x^7\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{8}x^8 + \log(|x-1|) + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx + C_1. \end{aligned}$$

Um das letzte Integral zu berechnen, versuchen wir die Substitution $u = x^2 + x + 1$. Es gilt $\frac{du}{dx} = (2x+1)$. Wir teilen das Integral also wieder auf:

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Den ersten Teil können wir nun mithilfe der Substitution $u = x^2 + x + 1$ berechnen:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\log(|u|) + C_2 = -\frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|) + C_2.$$

Für den zweiten Teil, ergänzen wir quadratisch und benutzen Substitution:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx &= \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}\,dx \\ &= \sqrt{3}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv \\ &= \sqrt{3}\arctan(v) + C_3 = \sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + C_3.\end{aligned}$$

Wir schliessen daraus

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{8}x^8 + \log(|x-1|) - \frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|) \\ +\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + C\end{aligned}$$

13.2. Integration II

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int_3^4 \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \int_2^3 \frac{du}{u^2+4} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{2}\,dv}{v^2+1} \\ = \frac{1}{2}\left(\arctan\frac{3}{2} - \arctan 1\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{3}{2} - \frac{\pi}{8},\end{aligned}$$

wobei wir zuerst $u = x - 1$ und dann $u = 2v$ substituiert haben.

(b) Wir erhalten zunächst mit partieller Integration

$$\int t^3\arctan(t)\,dt = \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int \frac{t^4}{t^2+1}\,dt.$$

Den letzten Bruch vereinfachen wir mittel Polynomdivision zu

$$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}\int t^3 \arctan(t)\,dt &= \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\,dt\\ &= \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\arctan(t) + C\end{aligned}$$

(c) Die Substitution $t = \sin x$ liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx &= \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = \int (\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2})\,dt\\ &= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + K = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + K.\end{aligned}$$

(d) Die Substitution $x = 4\sinh z$ ergibt $dx = 4\cosh z\,dz$ und folglich

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+16}\,dx &= \int \sqrt{16\sinh^2 z + 16}\cdot 4\cosh z\,dz = 16\int \cosh^2 z\,dz\\ &= 8\int(\cosh 2z + 1)\,dz = 4\sinh 2z + 8z + C\\ &= 8\sinh z\cosh z + 8z + C\\ &= 2x\cosh\Big(\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4}\Big) + 8\operatorname{Arsinh}\tfrac{x}{4} + C\\ &= 2x\sqrt{\Big(\frac{x}{4}\Big)^2 + 1} + 8\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4} + C\\ &= \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+16} + 8\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4} + C.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Relation

$$\cosh^2 z = \frac{1}{2}(\cosh(2z) + 1) + C$$

verwendet.

Bemerkung: Alternativ könnte man das obige Integral $I := \int \cosh^2 z\,dz$ auch mithilfe einer partiellen Integration berechnen:

$$\begin{aligned}I &= \int \cosh^2 z\,dz = \sinh z\cosh z - \int \sinh^2 z\,dz\\ &= \sinh z\cosh z - \int(\cosh^2 z - 1)\,dz = \sinh z\cosh z - \int \cosh^2 z\,dz + z\\ &= \sinh z\cosh z + z - I,\end{aligned}$$

also

$$I = \frac{1}{2}(\sinh z\cosh z + z) + C.$$

13.3. Tangenssubstitution

(a) Wir berechnen:

$$1 + t(x)^2 = \frac{\cos(x/2)^2 + \sin(x/2)^2}{\cos(x/2)} = \frac{1}{\cos(\frac{x}{2})}$$

Dies folgt aus der üblichen Identität $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Ferner sehen wir:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\frac{\cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2}}{\frac{1}{\cos(x/2)^2}} = \cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2 = \cos(x),$$

wobei wir im letzten Schritt das Additionstheorem für Kosinus verwenden. Ganz ähnlich findet man:

$$\frac{2t}{1+t^2} = 2\cos(x/2)^2 \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(x),$$

unter Verwendung des Additionstheorems für Sinus.

(b) Direktes Ableiten zeigt:

$$t'(x) = \frac{1}{2}\tan'(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \tan(\frac{x}{2})^2) = \frac{1+t^2}{2}$$

Man beachte, dass also $t'(x) \geq 1/2$ gilt, somit ist $t(x)$ also streng monoton wachsend und auch injektiv. Die Surjektivität lässt sich aus der Surjektivität des Tangens folgern oder mittels Abschätzungen aus den vergangenen Serien.

(c) Man sieht leicht nun leicht:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{2t(x)}{1+t(x)^2} + \frac{1-t(x)^2}{1+t(x)^2}} \frac{2}{1+t(x)^2} t'(x) dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{2t + 1 - t^2} dt \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{2 - (t-1)^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(t-1)^2}{2}} dt \\
&= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1-y^2}\sqrt{2} dy \\
&= \sqrt{2}(\operatorname{artanh}(0) - \operatorname{artanh}(-\frac{\sqrt{2}}{2})) \\
&= \sqrt{2}\operatorname{artanh}(\frac{\sqrt{2}}{2})
\end{aligned}$$

Hier haben wir $y = \frac{t-1}{\sqrt{2}}$ verwendet in der zweiten Substitution. Alternativ kann man mittels Partialbruchzerlegung sehen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{1-y^2}\sqrt{2}dy &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{1-y}dy + \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{1+y}dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\log\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - \log\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\Big(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log(3+2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Beide Lösungen sind korrekt. Man beachte, dass als Stammfunktion zu $\frac{1}{1-y}$ hier gerade die folgende Funktion gewählt wurde:

$$-\log(1-y)$$

13.4. Ableiten von Parameterintegralen

Wir schreiben:

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(t) := \int_0^t e^{-x^2}dx$$

Gemäss dem Hauptsatz ist G differenzierbar mit Ableitung:

$$G'(t) = e^{-t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Somit sehen wir nun also:

$$F(t) = G(\sin(t))$$

Dies ist klar, denn:

$$F(t) = \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2}dx = G(\sin(t)),$$

da G als Stammfunktion gewählt wurde. Somit gilt also nach Kettenregel:

$$F'(t) = G'(\sin(t))\cos(t) = e^{-\sin(t)^2}\cos(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

13.5. Konvergenz von Reihen via Integrale

(a) Dank der Monotonie von Integralen reicht es, folgende Ungleichung zu beweisen:

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Denn Prop. 6.3.2 gilt auch im Falle von Regelfunktionen. Dies lässt sich sehen, indem man eine feinere, gemeinsame Zerlegung in Intervalle wählt und somit den Grenzwert in Definition 6.2.9 berechnet.

Es reicht, diese Ungleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[n, n+1[$ zu prüfen. Sei also $n \leq x < n+1$, dann gilt per Definition:

$$f_1(x) = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = f_2(x),$$

wobei wir die Monotonie von f verwendet haben. Die gesuchte Ungleichung folgt also.

(b) Da f_1, f_2 Treppenfunktionen auf $[1, b[$ sind und somit natürlich auch Regelfunktionen, existiert das Integral. Tatsächlich ist das Integral gerade gegeben durch die Definition in Def. 6.2.1, das heisst für $b \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^b f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{b} f(k+1)((k+1)-k) = \sum_{k=1}^{b} f(k+1) = \sum_{k=2}^{b+1} f(k)$$

Dies ist klar, indem man die Zerlegung aus der Definition von f_1 betrachtet und im Hinterkopf behält, dass $f_1(x)$ konstant auf den Intervallen $[k, k+1[$ ist. Gänzlich analog folgt:

$$\int_1^b f_2(x)dx = \sum_{k=1}^{b} f(k)((k+1)-k) = \sum_{k=1}^{b} f(k)$$

Die Ungleichung aus der ersten Teilaufgabe ergibt also:

$$\sum_{k=2}^{b+1} f(k) \leq \int_1^b f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{b} f(k), \quad \forall b \in \mathbb{N}$$

(c) Man nehme an, die Reihe konvergiere. Dann gilt gemäss unserer vorherigen Ungleichung für jedes $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^b f(x)dx \leq \int_1^B f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{B} f(k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) < +\infty,$$

wobei $b \leq B \in \mathbb{N}$. Man beachte, dass wir $f \geq 0$ verwenden in der obigen Folge von Ungleichungen. Somit sind die Integrale von f über beschränkte Teilintervalle von

$[1, +\infty[$ beschränkt und gemäss Prop. 6.5.2 existiert also das uneigentliche Integral von f und erfüllt die Ungleichung:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

Umgekehrt konvergiere nun das uneigentliche Integral. Somit gilt analog dank der vorherigen Teilaufgabe für alle natürlichen Zahlen b:

$$\sum_{k=1}^{b} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{b} f(k) \leq f(1) + \int_1^{b-1} f(x)dx \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx < +\infty,$$

abermals unter Verwendung von $f \geq 0$. Somit sind alle Partialsummen von der Reihe beschränkt und dank der Nicht-Negativität von f konvergiert diese somit (Thm. 2.10.5) absolut. Ferner gilt die Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx$$

(d) Man bemerke, dass die Funktion:

$$f_s(x) := \frac{1}{(x+1)\log(x+1)^s},$$

auf $[1, \infty[$ stetig und sogar differenzierbar sind. Durch Ableiten finden wir:

$$f_s'(x) = -\frac{\log(x+1) + s}{(x+1)^2 \log(x+1)^{s+1}} < 0,$$

für alle $x \geq 1$ und $s \neq 0$. Somit sind also alle f_s auch streng monoton fallend (für $s = 0$ ist dies offensichtlich!) und ferner auch nicht-negativ. Die Konvergenz der Reihe ist also äquivalent gemäss unserer vorherigen Überlegungen zur Konvergenz des uneigentlichen Integrals:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\log(x+1)^s} dx$$

Es sei nun $b \in [1, +\infty[$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{1}{(x+1)\log(x+1)^s} dx &= \int_2^{b+1} \frac{1}{x\log(x)^s} dx \\ &= \int_{\log(2)}^{\log(b+1)} \frac{1}{y^s} dy,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $y = \log(x)$ verwendet haben. Gemäss der Vorlesung wissen wir, dass das uneigentliche Integral in der letzten Zeile genau dann konvergiert, wenn $s > 1$. Folglich konvergiert das uneigentliche Integral von f_s auch genau dann, wenn $s > 1$. Daraus schliessen wir, dass die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)^s},$$

genau dann (absolut) konvergiert, wenn $s > 1$.