1. Vollständigkeit

(a) Es sei $O \subset \mathbb{R}$ die Menge aller oberen Schranken von A. Es gilt $M \neq \emptyset$, da A von oben beschränkt ist. Gemäss Definition gilt für alle $a \in A, o \in O$:

$$a \leq o$$

Daher impliziert die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass:

$$\forall a \in A, \forall o \in O : \quad a \leq s \leq o$$

Man beachte, dass $a \leq s$ für alle $a \in A$. Daher gilt $s \in O$. Somit ist s das Supremum, da $s \leq o$ für alle $o \in O$. Dies beweist die gewünschte Aussage.

Die gewünschte Aussage für das Infimum besagt, dass wenn A nach unten beschränkt ist, so besitzt A ein Infimum. Man kann prüfen, dass sich das Infimum wie folgt berechnen lässt:

$$\inf A = -\sup(-A)$$

Man bemerke, dass wenn A nach unten beschränkt ist, so ist $-A$ nach oben beschränkt. Daher lässt sich die Existenz des Supremums von $-A$ verwenden, um das Infimum zu A zu bestimmen.

(b) Beweis 1: Wie in der Definition der Intervallschachtelung seien $I_k = [a_k, b_k]$ für alle natürlichen k und wir definieren:

$$A := \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}, B := \{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Es gilt per Wahl der a_k, b_k und $I_{k+1} \subset I_k$:

$$a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Somit seien nun $j, k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $j \leq k$. Es gilt:

$$a_j \leq a_{j+1} \leq \ldots \leq a_k \leq b_k$$

Ganz analog zeigt man:

$$b_j \geq b_{j+1} \geq \ldots \geq b_k \geq a_k$$

Somit wissen wir, dass für alle $a \in A, b \in B$ gilt $a \leq b$. Gemäss der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert nun ein reelles c mit $a \leq c \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$. Somit gilt:

$$c \in I_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es seien nun c, c' zwei reelle Zahlen, welche in jedem der I_k liegen. Falls $c \neq c'$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $c < c'$. Dadurch gilt, da alle I_k Intervalle sind:

$$[c, c'] \subset I_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Somit:

$$|I_k| = b_k - a_k \geq c' - c > 0$$

Dies ist ein Widerspruch zur zweiten Eigenschaft der Intervallschatelung und somit ist $c = c'$. Daher folgt die Eindeutigkeit.

Beweis 2: Es seien A, B wie zuvor. Beide Mengen sind von oben und unten beschränkt, daher besitzt A ein Supremum s. Man beachte, dass alle b_k obere Schranken für A sind, daher gilt:

$$s \leq b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Das bedeutet aber auch:

$$s \in I_k, \quad \forall \mathbb{N}$$

Also ist die Existenz wiederum klar und die Eindeutigkeit folgt wie in Beweis 1.

2. Kreise und Gerade in der komplexen Ebene $\star$ (Serie 3)

(a) (i.) Es gilt:

$$|z|^2 = x^2 + y^2,$$

wenn $z = x + iy$. Also ist die Menge $|z|^2 - 1 = 0$ gerade:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Die gesuchte Menge ist also der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.

(ii.) Wählen wir $z = x + iy$, so wird die Gleichung zu:

$$x^2 + y^2 + 2y - 2 = x^2 + (y + 1)^2 - 1$$

Durch Umordnen sehen wir:

$$x^2 + (y + 1)^2 = 3$$

Also ist die Menge gerade der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, -1)$.

(iii.) Wir zuvor reduziert sich die Gleichung zu:

$$x^2 + (y+1)^2 - 3 = 0,$$

also:

$$x^2 + (y+1)^2 = 3$$

Dies parametrisiert gerade den Kreis mit Mittelpunkt $(0, -1)$ und Radius $\sqrt{3}$.

(iv.) Direktes Einsetzen von $z = x + iy$ liefert:

$$-iz + i\overline{z} + 1 = 2y + 1 = 0$$

Dies Parametrisiert genau die Gerade $y = -1/2$ parallel zur x-Achse.

(b) Setzen wir $z = x + iy$ ein, so können wir die Identität umformen zu:

$$a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = a(x^2 + y^2) + 2(b_1 x + b_2 y) + c = 0$$

wobei wir $b = b_1 + b_2 i$ verwendet haben mit b_1, b_2 reell. Dies lässt sich auch schreiben als:

$$a\Big(x + \frac{b_1}{a}\Big)^2 - \frac{b_1^2}{a} + a\Big(y + \frac{b_2}{a}\Big)^2 - \frac{b_2^2}{a} + c = 0,$$

oder auch:

$$\Big(x + \frac{b_1}{a}\Big)^2 + \Big(y + \frac{b_2}{a}\Big)^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}$$

Man bemerke, dass wir hier implizit $a \neq 0$ angenommen haben. Die Bedeutung von $|b|^2 > ac$ wird hierbei klar, denn:

$$\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|} > 0,$$

ist genau der Radius des Kreises um $(-b_1/a, -b_2/a)$ der die vorgegebene Gleichung beschreibt. Somit haben wir gesehen, dass für $a \neq 0$ die Gleichung ein Kreis beschreibt. Umgekehrt ist klar aufgrund der expliziten Formeln für Mittelpunkt und Radius, dass jeder Kreis sich in dieser Form schreiben lässt.

Wir behandeln nun den Fall $a = 0$. Dann $|b| \neq 0$, also $b \neq 0$. Man sieht sofort, dass:

$$\overline{b}z + b\overline{z} + c = 2(b_1 x + b_2 y) + c = 2b_1 \cdot x + 2b_2 \cdot y + c = 0,$$

unter Verwendung derselben Methoden wie oben. Dank der Einführung in die Aufgabe wissen wir, dass eine solche Menge eine Gerade ist und jede Gerade diese Form besitzt. Somit haben wir die Aufgabe gelöst.

(c) Wir wissen, dass:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Teilen wir also die Gleichung für eine Gerade oder einen Kreis mit $c \neq 0$ (dann $z = 0$ keine Lösung der Gleichung) durch $|z|^2$, so sehen wir:

$$a + \overline{b}\frac{z}{|z|^2} + b\frac{\overline{z}}{|z|^2} + c\frac{1}{|z|^2} = a + \overline{bz^{-1}} + bz^{-1} + c|z^{-1}|^2 = 0,$$

zumindest für $z \neq 0$. Es zeigt sich, dass z^{-1} eine ähnliche Identität erfüllt, daher also auf einem Kreis liegt (unabhängig davon, ob vorher $a \neq 0$ oder nicht). Falls $c = 0$, so liegt $z = 0$ in der Menge der Lösungen. Wenn wir $z \neq 0$ betrachten, so sehen wir analog zu oben:

$$a + \overline{bz^{-1}} + bz^{-1} = 0$$

Daher liegen alle $z \neq 0$ weiterhin auf einer Geraden. Für diejenigen, die die Riemann-Sphäre kennen, kann das Verhalten in ∞ ergänzt werden um zu sehen, dass sich die Aussage in 0 und ∞ fortsetzen lassen.

3. Limes Superior

(a) Zuerst ist festzustellen, dass b_n wohldefiniert ist: Zumal (a_n) und damit auch jede Teilfolge beschränkt ist, existiert das Supremum b_n für alle natürlichen Zahlen n. Zudem bemerken wir, dass für alle $m \geq n + 1$ gilt:

$$a_m \leq \sup_{k \geq n} a_k,$$

denn das Supremum ist eine obere Schranke für alle Folgeglieder ab n und somit auch für alle Folgeglieder ab $n + 1$. Da das Supremum die kleinste obere Schranke ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \sup_{k \geq n+1} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k = b_n,$$

das heisst, die Folge ist monoton fallend.

Da die Folge (b_n) fallend ist, reicht es zu zeigen, dass sie von unten beschränkt ist. Dazu sei bemerkt, dass ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq C,$$

denn (a_n) ist von unten beschränkt. Wäre $b_n < C$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so würde folgen:

$$\forall k \geq n : C \leq a_k \leq b_n < C,$$

was ein Widerspruch ist. Somit ist (b_n) beschränkt.

(b) Dank Theorem 2.8.3 wissen wir, dass die Folge (b_n) konvergiert mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k =: b$$

Wir konstruieren nun eine Teilfolge (c_n) von (a_n), welche gegen b konvergiert. Es sei $c_1 = a_1$ und wir definieren dann c_n induktiv: Es sei $c_n = a_{k_n}$, dann wählen wir c_{n+1}, sodass $c_{n+1} = a_{k_{n+1}}$ mit $k_n < k_{n+1}$ und:

$$c_{n+1} = a_{k_{n+1}} > \sup_{l\geq k_n+1} a_l - \frac{1}{2^{n+1}} = b_{k_n+1} - \frac{1}{2^n}$$

Zudem gilt $c_{n+1} \leq b_{k_n+1}$ per Definition der b_n. Beachte, dass ein solches c_{n+1} existiert, da das Supremum die kleinste obere Schranke ist.

Die Folge (c_n) ist also definiert, wir müssen nur noch die Konvergenz nachweisen. Es gilt:

$$\begin{aligned} |c_n - b| &\leq |c_n - b_{k_{n-1}+1}| + |b_{k_{n-1}+1} - b| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + |b_{k_{n-1}+1} - b| \end{aligned}$$

Es ist klar, dass $1/2^n$ gegen 0 konvergiert und der zweite Summand konvergiert ebenfalls gegen 0, da (b_n) und somit jede Teilfolge gegen b konvergiert. Die gwünschte Konvergenz folgt also aus Lemma 2.5.8.

(c) Es sei a ein Häufungspunkt von (a_n), welcher grösser als b ist, d.h. $b < a$. Dann existiert eine Teilfollge (c_n) von (a_n), sodass:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a$$

Dann existieren also unendlich viele Folgeglieder a_{k_n} mit $b < a_{k_n}$, da ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass:

$$\forall n \geq N : |c_n - a| < \frac{1}{2}(a-b),$$

und somit $c_n \geq a - |c_n - a\ | > a - \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(a+b)$. Zudem sind die k_n definiert durch $c_n = a_{k_n}$. Dann gilt aber auch:

$$b_{k_n} \geq a_{k_n} > \frac{1}{2}(a+b)$$

Da aber die Teilfolge b_{k_n} auch gegen b konvergiert, liefert dies den gewünschten Widerspruch, da b_{k_n} nicht beliebig nahe an b herankommen kann.

(d) Schlagen Sie unter Wikipedia oder einer der auf der Vorlesungsseite präsentierten Referenzen unter 'Limes Inferior' nach.

4. Kompaktheit

(a) Da jede konvergente Teilfolge beschränkt ist, ist dies klar. Genauer, nehmen wir an, dass K unbeschränkt ist. Dann existieren Elements $a_n \in K$ für jede natürliche Zahl n mit:

$$|a_n| > n$$

Somit können wir eine unbeschränkte Folge in K wählen. Diese muss nun eine konvergente Teilfolge besitzen, da K kompakt ist. Diese konvergente Teilfolge ist beschränkt. Da aber jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ automatisch wegen $|a_n| > n$ unbeschränkt ist, führt dies zu einem Widerspruch. Also ist K beschränkt.

(b) Wir wählen die Folge $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist dies eine Folge in $[0,1[$, welche konvergiert mit Grenzwert 1, da aber 1 nicht in der Menge $[0,1[$ liegt ist diese gemäss unserer Definition nicht kompakt. Dies zeigt insbesondere, dass Beschränktheit nicht äquivalent zu Kompaktheit ist.

Es sei nun (a_n) eine Folge in $[0,1]$. Eine solche Folge ist offensichtlich beschränkt, also besitzt sie eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert muss auch in $[0,1]$ liegen, denn wäre der Grenzwert $y > 1$, dann gilt:

$$|x_n - y| = y - x_n \geq y - 1 > 0,$$

was der Konvergenz widerspricht. Beachte, dass wir $x_n \leq 1$ verwendet haben. Ähnlich kann man $y \geq 0$ zeigen. Also ist $[0,1]$ kompakt.

(c) Es sei (b_n) eine Folge in $f(K)$. Dann existiert eine Folge (a_n) in K, sodass für jedes n gilt:

$$f(a_n) = b_n$$

Beachten Sie, dass a_n nicht eindeutig festgelegt sein muss. Da (a_n) eine Folge in K ist und K kompakt ist, besitzt diese eine konvergente Teilfolge (c_n) mit Grenzwert $c \in K$. Da f stetig ist, gilt nun auch, dass die Folge (d_n) definiert durch $d_n := f(c_n)$ für alle n konvergiert mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} c_n\right) = f(c) \in f(K)$$

Da (d_n) per Definition eine Teilfolge von (b_n) ist und (b_n) beliebig war, folgern wir, dass $f(K)$ kompakt ist.

(d) Es ist klar durch die vorherigen Aufgaben, dass $f(K)$ kompakt und somit beschränkt ist. Es seien $s := \sup f(K)$ und $j := \inf f(K)$. Wir zeigen nur, dass f sein Supremum annimmt (was somit ein Maximum ist), die Überlegungen zum Minimum sind komplett analog: Nehmen wir eine Folge (b_n) in $f(K)$ monoton wachsend, welche gegen $\sup f(K)$ konvergiert. Da die Folge in der kompakten Menge $f(K)$ liegt, besitzt sie eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $f(K)$. Da die Folge (b_n) aber sogar konvergent ist mit Grenzwert $\sup f(K)$, konvergiert auch jede Teilfolge gegen das Supremum. Somit folgert sich, dass $\sup f(K) \in f(K)$, da der Grenzwert einer Teilfolge in $f(K)$ liegen muss. Somit nimmt f also sein Maximum an.

5. Konvergenzverhalten auf dem komplexen Rand

(a) Gemäss der vorherigen Teilaufgabe wissen wir, dass der Konvergenzradius 1 ist. Ein x mit $|x\ | = 1$ hat daher die folgende Form:

$$x = e^{i\varphi},$$

für ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies nun in die Partialsummen der Potenzreihe ein, so erkennen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{in\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{im\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

Man erkennt problemlos, dass:

$$|\ x^n| = \left| e^{in\varphi} \right| = 1,$$

also ist die Folge keine Nullfolge und die Reihe kann somit nirgends konvergieren auf dem Rand.

(b) Gemäss der vorherigen Teilaufgabe wissen wir, dass der Konvergenzradius 1 ist. Verwenden wir abermals die Darstellung von x als Exponential, so sehen wir, dass die Folge $a_n = 1/n$ monoton fallend ist und die Folge $b_n = e^{in\varphi}$ beschränkte Partialsummen hat, falls $\varphi \neq 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$:

$$\left| \sum_{n=1}^{m} b_n \right| = \left| e^{i\varphi} \frac{1 - e^{im\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} \right| \leq \left| \frac{2}{1 - e^{i\varphi}} \right|,$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass:

$$\left| 1 - e^{im\varphi} \right| \leq 2$$

Daher können wir Aufgabe 5.5. aus Serie 5 verwenden, um zu schlussfolgern, dass die Reihe also für $\varphi \neq 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ konvergiert. Daher konvergiert die Potenzreihe am Rand des Konvergenzkreises für $x \neq 1$ bedingt. Für $x = 1$ sehen wir, dass die Potenzreihe wie folgt aussieht:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

was offensichtlich divergiert.

(c) Gemäss der vorherigen Teilaufgabe wissen wir, dass der Konvergenzradius 1 ist. Man beachte, dass für alle $|x| = 1$ gilt:

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ absolut konvergiert, folgt, dass die Potenzreihe überall auf dem Rand absolut konvergiert.

6. Alternative Definition der Eulerzahl e

(a) Wir finden mittels des Binomischen Lehrsatzes:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

(b) Man beachte, dass gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!},$$

für beliebige natürliche Zahlen $k \leq n$. Damit folgt sich nun aber:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{n^k}{k!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

(c) Mittels der Berechnungen aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}\right)$$

Man beachte, dass hieraus sofort folgt mittels der Produkteigenschaft von Grenzwerten:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

(d) Wir wählen k_0 fix. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{k_0}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \sum_{k=0}^{k_0}\frac{1}{k!}\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{1}{k!}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{k_0}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \sum_{k=0}^{k_0}\frac{1}{k!}\right| + 2\cdot\sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{1}{k!} \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{k_0}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \sum_{k=0}^{k_0}\frac{1}{k!}\right| + 2\cdot\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Es sei hier hervorgehoben, dass wir die Schranke aus der zweiten Teilaufgabe verwendet haben. Wir bemerken, dass ein k_0 existiert, sodass für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k!} < \frac{\varepsilon}{4}$$

Daher wissen wir bereits:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| < \left|\sum_{k=0}^{k_0}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \sum_{k=0}^{k_0}\frac{1}{k!}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=0}^{k_0}\left|\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Gemäss der vorherigen Teilaufgabe konvergiert jeder Summand gegen 0, d.h. da wir nur endlich viele (nämlich k_0-viele) Summanden klein machen wollen, welche alle gegen 0 gehen, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\left|\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!}\right| < \frac{\varepsilon}{2k_0}$$

Daher finden wir für alle $n \geq N$:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| < k_0\cdot\frac{\varepsilon}{2k_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dies ist die gewünschte Ungleichung.

(e) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \exp(1) = e$$

Daher existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - e\right| < \varepsilon$$

Indem wir N höchstens vergrössern, finden wir mittels der vorherigen Teilaufgabe für alle n gross genug:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| \leq \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| + \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - e\right| < 2\varepsilon,$$

und somit können wir folgern, dass:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

7. Zwischenwertsatz für Ableitungen

(a) Wir sehen sofort, dass f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sicherlich stetig und differenzierbar ist als Komposition solcher Funktionen. Die Ableitung für $x \neq 0$ lässt sich mit Ketten-, Produkt und Quotientenregel wie folgt berechnen:

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dank der Oszillationen des Kosinus, genauer durch Einsetzen der Folgen:

$$a_n := \frac{1}{2n\pi}, b_n := \frac{1}{(2n+1)\pi}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

sehen wir sofort:

$$f'(a_n) = 2a_n\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1,$$

und andererseits:

$$f'(b_n) = 2b_n\sin((2n+1)\pi) - \cos((2n+1)\pi) = 1.$$

Dies zeigt, da sowohl (a_n) als auch (b_n) gegen 0 konvergieren, dass die Ableitung keine stetige Fortsetzung in 0 besitzt. Also gilt, auch wenn f in 0 differenzierbar ist, automatisch dass f' in 0 unstetig ist.

Wir müssen noch prüfen, ob f in 0 differenzierbar ist. Aus der Vorlesung wissen wir, dass f dann auch in 0 stetig ist, das bedeutet, wir können automatisch schliessen, dass f stetig und differenzierbar ist und haben die Aufgabe gelöst. Zur Differenzierbarkeit betrachten wir den Differenzenquotienten und beobachten für beliebige $x \neq 0$:

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

wobei wir die Beschränktheit des Sinus verwendet haben. Lässt man nun $x \to 0$, so sehen wir, dass:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

also ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

(b) Es gilt, dass wenn $f'(a_+) > 0$ ist, dann gilt per Definition des Grenzwertes:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], |x-a| < \delta : \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0,$$

und somit auch:

$$f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a),$$

für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-a| < \delta$. Dies folgt, da $x - a > 0$. Das impliziert, dass $f(a)$ sicherlich nicht das Maximum der Funktion f sein kann. Ganz analog argumentiert man für $f(b)$, wobei hier aus $f'(b_-) < 0$ folgt, dass:

$$\exists \delta' > 0, \forall x \in [a,b], |x-a| < \delta' : \quad \frac{f(x)-f(b)}{x-b} < 0,$$

und unter Verwendung von $b > x$ also auch:

$$f(x) - f(b) > 0 \Rightarrow f(x) > f(b).$$

Da f also sein Maximum, welches gemäss Extremumssatz an einer Stelle in $[a,b]$ angenommen werden muss, da f stetig ist, nicht in a oder b erreicht, nimmt f sein Maximum an einer Stelle $c \in]a,b[$ an.

(c) Betrachten wir g wie aus der Aufgabe, so sehen wir sofort:

$$g'(a_+) > 0 g'(b_-),$$

denn der entsprechende Grenzwert für g lässt sich sofort dank der Differenzierbarkeit von Polynomen auf ganz $\mathbb{R}$ bestimmen. Daher gilt gemäss der vorherigen Teilaufgabe, dass g sein Maximum an einer Stelle $c \in]a,b[$ annimmt. Das bedeutet aber auch, dass gilt:

$$g'(c) = f'(c) - \gamma = 0,$$

dank eines Resultats aus der Vorlesung. Somit ist die gewünschte Aussage gezeigt.

(d) Die vorherige Aufgabe zeigt uns, dass für beliebiges $\gamma \in]f'(b_-), f'(a_+)[$ eine Stelle $c_\gamma \in]a,b[$ existiert mit $f'(c_\gamma) = \gamma$. Das gewünschte Resultat ist also eine direkte Konsequenz.

(e) Wir definieren $\tilde{f}(x) := -f(x)$. Dann sehen wir sofort:

$$\tilde{f}'(a_+) > 0\tilde{f}'(b_-)$$

Also lässt sich das vorherige Resultat auf $\tilde{f}$ anwenden. (Bemerke, dass $\tilde{f}$ dieselben Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften wie f besitzt) Da aber $\tilde{f}'(x) = -f'(x)$, kann man somit auch den Zwischenwertsatz für Ableitungen für f beweisen, denn wenn $\gamma \in]f'(a_+), f'(b_-)[$, so gilt $-\gamma \in]-f'(b_-), -f'(a_+)[=]\tilde{f}'(b_-), \tilde{f}'(a_+)[$. Damit existiert ein $c_\gamma \in]a, b[$ mit $\tilde{f}'(c_\gamma) = -f'(c_\gamma) = -\gamma$. Kürzt man das Vorzeichen weg, ist also klar, dass:

$$f'(c_\gamma) = \gamma$$

8. Grenzwerte und Taylorpolynome

(a) Durch Definition 5.7.1 sehen wir:

$$T_k f(x; 0) = f^{(k)}(0)x^k$$
$$T_k g(x; 0) = g^{(k)}(0)x^k$$

Ferner schreiben wir:

$$R_k(x; f) := f(x) - T_k f(x; 0), R_k(x; g) := g(x) - T_k g(x; 0)$$

Somit sehen wir für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f^{(k)}(0)x^k + R_k(x; f)}{g^{(k)}(0)x^k + R_k(x; g)} \\
&= \frac{f^{(k)}(0)x^k}{g^{(k)}(0)x^k} \cdot \frac{f^{(k)}(0)x^k + R_k(x; f)}{f^{(k)}(0)x^k} \cdot \frac{g^{(k)}(0)x^k}{g^{(k)}(0)x^k + R_k(x; g)} \\
&= \frac{f^{(k)}(0)}{g^{(k)}(0)} \cdot \frac{f^{(k)}(0) + x^{-k}R_k(x; f)}{f^{(k)}(0)} \cdot \frac{g^{(k)}(0)}{g^{(k)}(0) + x^{-k}R_k(x; g)} \\
&= \frac{f^{(k)}(0)}{g^{(k)}(0)} \cdot \left(1 + \frac{1}{f^{(k)}(0)x^k} R_k(x; f)\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{g^{(k)}(0)x^k} R_k(x; g)}
\end{aligned}$$

Später werden wir kurz erklären, warum diese Rechnung funktioniert, d.h. warum wir nicht durch 0 teilen. Man bemerke, dass wegen $x \neq 0$ und der Annahme zu den Ableitungen von f, g nur gezeigt werden muss, dass:

$$1 + \frac{1}{g^{(k)}(0)x^k} R_k(x; g) \neq 0,$$

für alle x nahe bei 0. Zuerst bemerken wir, dass gemäss Theorem 5.7.3 wissen:

$$R_k(x;f) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!}x^{k+1}, R_k(x;g) = \frac{g^{(k+1)}(d_x)}{(k+1)!}x^{k+1},$$

wobei c_x, d_x im Intervall zwischen x und 0 liegt. Da f, g beliebig oft differenzierbar sind, sind $f^{(k+1)}, g^{(k+1)}$ stetig und somit auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ beschränkt gemäss Extremumssatz (hier, $\varepsilon > 0$ ist klein genug, damit obiges Intervall in I liegt). Also existiert eine Konstante $C > 0$, sodass:

$$|f^{(k+1)}(x)|, |g^{(k+1)}(x)| \leq C, \quad \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Daher gilt:

$$|R_k(x;f)| \leq \frac{C}{(k+1)!}x^{k+1},$$

und analog für $R_k(x;g)$. Man beachte, dass insbesondere dank der Dreiecksungleichung gilt:

$$1 - \frac{C}{f^{(k)}(0)(k+1)!}x \leq \left|1 + \frac{1}{f^{(k)}(0)}R_k(x;f)\right| \leq 1 + \frac{C}{f^{(k)}(0)(k+1)!}x$$

Daher gilt auch für x nahe genug an 0:

$$0 < \left|1 + \frac{1}{f^{(k)}(0)}R_k(x;f)\right|$$

Somit ist dividieren wir in unseren obigen Vereinfachungen sicher nicht durch 0 für x nahe genug bei 0. Zudem folgt mit der Abschätzung des Restgliedes:

$$\left|1 + \frac{1}{f^{(k)}(0)x^k}R_k(x;f) - 1\right| \leq \frac{C}{f^{(k)}(0)(k+1)!}x$$

Somit haben wir:

$$\lim_{x\to 0}\Big(1 + \frac{1}{f^{(k)}(0)x^k}R_k(x;f)\Big) = 1$$

Daher gilt, mittels der analogen Berechnung für g unter Verwendung des Grenzwertes unter Inversion:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k)}(0)}{g^{(k)}(0)} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1 + \frac{1}{f^{(k)}(0)x^k}R_k(x;f)}{1 + \frac{1}{g^{(k)}(0)x^k}R_k(x;g)} = \frac{f^{(k)}(0)}{g^{(k)}(0)}$$

(b)

- Wir sehen dank der Restgliedformel:

$$\log(1+x) = x + xr(x),$$

wobei $r(x)$ gegen 0 konvergiert, wenn $x \to 0$. Somit gilt:

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x + xr(x)}{x} = 1 + r(x),$$

und wir finden daher den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + r(x) = 1$$

- Da $\cos(2x)$ eine Potenzreihe ist, lässt sich das Taylorpolynom 4.Ordnung von $\cos(2x) - 1 - 2x^2$ leicht bestimmen:

$$\cos(2x) - 1 + 2x^2 = \frac{2^4}{4!}x^4 + x^4 r_1(x) = \frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x),$$

wobei $r_1(x) \to 0$, falls $x \to 0$ dank der Restgliedformel für Taylorpolynome. Zudem gilt:

$$\sin(x) = x + xr_2(x),$$

und somit:

$$x \sin(x)^3 = x^4(1 + r_2(x))^3,$$

wobei auch hier $r_2(x) \to 0$, wenn $x \to 0$. Daher können wir sehen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x \sin(x)^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x)}{x^4(1 + r_2(x))^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3} + r_1(x)}{(1 + r_2(x))^3} = \frac{2}{3}$$

- Wir bemerken zuerst:

$$\cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\frac{1}{x} \log(\cos(x))\Big)$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, reicht es den folgenden Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x}$$

Wir bestimmen das Taylorpolynom des Zählers: Der erste Koeffizient lässt sich durch Einsetzen bestimmen:

$$\log(\cos(0)) = \log(1) = 0,$$

Durch Ableiten finden wir zudem:

$$\Big(\log(\cos(x))\Big)' = -\frac{1}{\cos(x)} \sin(x)$$

Somit ist die Ableitung in $x = 0$ gerade 0. Daher folgt mittels der Restgliedformel:

$$\log(\cos(x)) = 0 + \frac{0}{1!}x + xr(x) = xr(x),$$

wobei $r(x) \to 0$ wenn $x \to 0$ dank der Taylorformel. Daher berechnen wir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xr(x)}{x} = \lim_{x\to 0} r(x) = 0,$$

und somit dank der Stetigkeit:

$$\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp(0) = 1$$

9. Alternative Version des Mittelwertsatzes

(a) Da $g(b) \neq g(a)$ ist die Funktion wohldefiniert und als Summe und Produkt differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Stetigkeit folgt auch sofort aus demselben Grund.

(b) Setzen wir $x = a$, so finden wir:

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = f(a)$$

Analog, wenn wir $x = b$ setzen:

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

Somit folgt:

$$h(a) = f(a) = h(b)$$

(c) Gemäss Mittelwertsatz (die Bedingungen um diesen anzuwenden wurden in der ersten Teilaufgabe geprüft) existiert ein $c \in]a, b[$ mit:

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0,$$

wobei die zweite Gleichung aus $h(a) = h(b)$ folgt.

(d) Durch Ableiten finden wir:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

Somit gilt also, falls $h'(c) = 0$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

Daher folgt, falls $g'(c) \neq 0$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(e) Man beachte, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, denn sonst existiert ein c zwischen x und x_0 mit $g'(c) = 0$ gemäss Mittelwertsatz. Also sind alle Quotienten wohldefiniert. Wir bemerken, dass:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Somit können wir dank der Annahme $g'(y) \neq 0$ für alle $y \in I$ und dem bewiesenen verallgemeinerten Mittelertsatz für jedes $x \neq x_0 \in I$ ein c_x zwischen x und x_0 finden, sodass:

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(f) Man erinnere sich, dass es reicht, für jede konvergente Folge $(x_n) \subset I$ mit $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ zu zeigen, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

existiert und mit dem Grenzwert auf der rechten Seite der Aufgabenstellung übereinstimmt. Man bemerke, dass $\forall n \in \mathbb{N}$, existiert ein c_{x_n} zwischen x_n und x_0 gemäss verallgemeinertem Mittelwertsatz, sodass:

$$\frac{f'(c_{x_n})}{g'(c_{x_n})} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

Da x_n aber gegen x_0 konvergiert und c_{x_n} zwischen x_n und x_0 liegt, konvergiert auch c_{x_n} gegen x_0 für n gegen $+\infty$. Es gilt aber per Annahme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_{x_n})}{g'(c_{x_n})} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

und somit auch:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Da dies für alle Folgen gilt, existiert der Grenzwert und die Gleichung aus der Aufgabenstellung ist bewiesen.

10. Mittelwertsatz für Integrale (Serie 13)

Da $[a,b]$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall ist, nimmt f auf $[a,b]$ sein Maximum M an einer Stelle $x_M\in[a,b]$ und Minimum m in $[a,b]$ an einer Stelle $x_m\in]a,b]$ gemäss Extremumssatz an. Das heisst:

$$\forall x\in[a,b]:f(x_m)=m\leq f(x)\leq M=f(x_M)$$

Da $g(x)\geq 0$ gilt nun auch:

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$$

Hieraus folgert sich sofort aufgrund der Monotonie des Integrals:

$$m\cdot\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Somit existiert ein $C\in[m,M]$ mit:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=C\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Da $m\leq C\leq M$ existiert gemäss Zwischenwertsatz ein c zwischen x_m und x_M, sodass:

$$f(c)=C$$

Das heisst aber gerade:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

11. Parameterabhängige Integrale (von F.Nestaas)

Es sei F die Stammfunktion zu f mit $F(0)=0$. Gemäss Hauptsatz gilt:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\forall x\in\mathbb{R}$$

Somit sehen wir:

$$F(x^2+x^3) = F(x^2+x^3) - F(0) = \int_0^{x^2+x^3} f(t)dt = x, \forall x \geq 0$$

Leiten wir nun für $x > 0$ auf beiden Seiten nach x ab, so sehen wir dank der Kettenregel und $F' = f$:

$$f(x^2+x^3)(2x+3x^2) = 1$$

Daher wissen wir durch Einsetzen von $x = 1$:

$$f(2) \cdot 5 = 1 \;\Rightarrow\; f(2) = \frac{1}{5}$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe lösen, indem wir feststellen, dass F die Umkehrfunktion zu $x^2 + x^3$ ist auf $[0, +\infty[$. Dies folgert sich sofort aus:

$$F(x^2+x^3) = x$$

Zudem kann man sehen, dass:

$$(x^2+x^3)' = 2x + 3x^2 > 0, \forall x > 0,$$

Also ist $x^2 + x^3$ streng monoton wachsend auf $]0, +\infty[$, also injektiv, und wegen der Divergenz gegen $+\infty$ für x gegen unendlich auch surjektiv, wenn der Bildraum $]0, +\infty[$ gewählt wird, gemäss Zwischenwertsatz (denn $0^2 + 0^3 = 0$). Also besitzt die Funktion auf $]0, +\infty[$ eine Umkehrfunktion $h :]0, \infty[\to]0, \infty[$ und wir haben wir beobachtet $F = h$. Die Aufgabe lässt sich nun mittels Prop. 5.1.6 lösen.

12. Ableitungen, Integrale und Grenzwerte

Prüfen Sie Ihre Lösungen mittels Wolframalpha. Sollten einzelne Aufgaben Schwierigkeiten bereiten oder der Lösungsweg unklar sein, so kontaktieren Sie den Organisator unter:

jerome.wettstein@math.ethz.ch

Als Hilfsmittel präsentieren wir einzelne Lösungen:

(a) Wir lösen a) und d):

In a) bemerken wir:

$$x^{-x} = e^{-x\log(x)}, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Somit, dank der Kettenregel:

$$(x^{-x})' = e^{-x\log(x)}\Big(-\log(x) - x\cdot\frac{1}{x}\Big) = -x^{-x}(1+\log(x))$$

In d) sehen wir mittels der Produktregel (oder der Quotientenregel):

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\arctan(x)}{1-x^2}\Big)' &= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{2x\arctan(x)}{(1-x^2)^2}\\ &= \frac{1-x^2+2x(1+x^2)\arctan(x)}{(1-x^2)^2(1+x^2)}\end{aligned}$$

(b) In c) verwenden die Beobachtung:

$$1+\tan(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)}$$

Daher gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(x)+\sin(x))dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(x))dx$$

Verwenden wir die Formeln für $\cos(x), \sin(x)$, so sehen wir:

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\\ &= \frac{1}{2}\Big((1-i)e^{ix} + (1+i)e^{-ix}\Big)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{ix} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-ix}\Big)\\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\Big(e^{-i\pi/4}e^{ix} + e^{i\pi/4}e^{-ix}\Big)\\ &= \sqrt{2}\cos\Big(\frac{\pi}{4} - x\Big)\end{aligned}$$

Also wissen wir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(x)+\sin(x))dx = \frac{\pi}{8}\log(2) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\Big)dx$$

Verwendet man die Substitution $y = \pi/4 - x$, so sehen wir nun sofort:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan(x))dx = \frac{\pi}{8}\log(2)$$

In e) verwenden wir die Substitution $y = \log(x)$ um folgende Gleichung zu finden:

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x))dx = \int_0^\pi \sin(y)e^y dy,$$

und durch wiederholte Anwendung von partieller Integration finden wir somit:

$$\int_0^\pi \sin(y)e^y dy = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

In h) verwenden wir, dass:

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{1+e^x-e^x}{\sqrt{1+e^x}} = \sqrt{1+e^x} - \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Damit reduziert sich das Integral auf die Berechnung der Integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$$

Bei Letzterem genügt die Substitution $y = e^x$ und das Integral wird expllzit lösbar. Bei Ersterem führt hingegen die Substitution $y = \sqrt{1+e^x}$ direkt zu:

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2y^2}{y^2-1}dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2}{y^2-1} + 2dy$$

Alternativ lässt sich das ganze Integral mit dieser Substitution betrachten.

In i) nutzt man $\sin(x) = \sqrt{1-\cos(x)^2}$ für alle $0 \leq x \leq \pi/2$. Dann findet man mittels der Substitution $y = \cos(x)$ sowie den Logarithmusgesetzen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\log(\sin(x))dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\log(\sqrt{1-\cos(x)^2})dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \frac{1}{2}\Big(\log(1-\cos(x)) + \cos(1+\cos(x))\Big)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\Big(\log(1-y) + \log(1+y)\Big)dy \\
&= \log(2) - 1
\end{aligned}$$

(c) In e), beobachten wir:

$$\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x} = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{x^2}},$$

also genügt es, den Grenzwert von:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

zu berechnen und davon die Wurzel zu ziehen, zumal die Wurzel eine stetige Funktion definiert. Dies ist nun einfach zu lösen mittels Taylorapproximation.

In f) beobachten wir:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{k}{n})^2}$$

Wir erkennen, dass auf der rechten Seite eine Riemann-Summe der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ auf $[0, 1]$ darstellt. Da $1/n$ gegen 0 konvergiert, finden wir also dank den Resultaten aus der Vorlesung:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

In g) gehen wir vor wie in f) und sehen:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}}$$

Somit sind die Summen Riemann-Summen der Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ auf $[0, 1]$ und der Grenzwert lässt sich abermals mittels Integrieren der Funktion bestimmen.