1.1. Definitionsbereich

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - 1}\right)$$

definiert ist.

1.2. Mengen

Beschreiben Sie explizit (d.h. in so einfacher Form wie möglich) die Elemente der folgenden Mengen:

(a) $K_1 := \{(-1)^n n + \cos(n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $K_2 := \{\cos\left[((-1)^n n + \cos(n\pi))\pi\right] : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $K_3 := \left\{\frac{4}{\pi^2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\pi)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.3. Bijektivität

Zeigen Sie, dass die Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad f(x) := \frac{x}{1 + |x|},$$

bijektiv ist.

1.4. Funktionen

Gegeben seien Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$. Zeigen Sie:

(a) Wenn f und g surjektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.

(b) Wenn f und g injektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.

(c) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

(d) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

(e) Zeigen Sie, dass folgende Aussage nicht korrekt ist (d.h. finden Sie ein Gegenbeispiel): Wenn g surjektiv ist, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(f) Zeigen Sie, dass folgende Aussage nicht korrekt ist (d.h. finden Sie ein Gegenbeispiel): Wenn f injektiv ist, so ist auch $g \circ f$ injektiv.