

2.1. Komplexe Zahlen I

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $|zw| = |z||w|$

(b) $\overline{\overline{z}} = z$.

2.2. Komplexe Zahlen II

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$

(a) $(2 + i)(2 - i)$,

(b) $(1 + 3i)^2$,

(c) $\frac{1+i}{1-i}$.

2.3. Punktmengen

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - i| < 2\}$

2.4. Parallelogramm-Gesetz

Benutzen Sie die Eigenschaft $|z|^2 = z\bar{z} = \bar{z}z$ für alle komplexen Zahlen z , um zu zeigen:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

2.5. Manipulation von Summen und Produkten

Zeigen Sie *ohne* Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a)

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$$

(b)

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}, \quad (\text{wobei } a_k \neq 0 \text{ für } k = 0, \dots, n).$$

(c)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n},$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a)

(d)

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (b).