

### 3.1. Konvergenz

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - \sqrt{n^5}}{n^2 + 1} + (-1)^n 10^{27}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{n^2 + 1} - \frac{n^3 - n^2}{n^2 + 1}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{97} - n^{44}}{n^5 - n^2 + 2^n}$

### 3.2. Konvergenz von Reihen

Verwenden Sie das Quotientenkriterium aus Serie 5 oder das Wurzelkriterium aus Serie 6, um die Konvergenz der folgenden Reihen nachzuweisen:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^n}$  für alle reellen Zahlen  $x$ .

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n} x^n$  für alle reellen Zahlen  $x$  mit  $|x| < 1$ .

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$  für alle reellen Zahlen  $x$ .

### 3.3. Stückweise stetige Funktion

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) := \begin{cases} 3\sqrt{-x} + 1, & \text{falls } x < 0; \\ cx + d, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1; \\ x^{10} - 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass Sie  $\mathbb{R}$  in endlich viele Intervalle unterteilen können, so dass  $f$  eingeschränkt auf ein einzelnes Intervall stetig ist.

(b) Bestimmen Sie  $c \in \mathbb{R}$  und  $d \in \mathbb{R}$ , so dass  $f$  überall stetig ist.

### 3.4. Fixpunkt

Es sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine stetige Funktion. Beweisen Sie mittels Zwischenwertsatz (Theorem 3.3.1), dass ein  $c \in [0, 1]$  existiert mit  $f(c) = c$ . Ein solches  $c$  ist ein *Fixpunkt*.

**Hinweis:** Es sei  $g(x) := f(x) - x$ . Was ist der Zusammenhang zwischen Fixpunkten von  $f$  und Nullstellen von  $g$ ? (Eine Nullstelle von  $g$  ist ein Punkt  $c \in [0, 1]$  mit  $g(c) = 0$ )

### 3.5. Maximum von zwei Funktionen

Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen. Wir definieren eine weitere Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als das punktweise Maximum von  $f$  und  $g$ , d.h.:

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie, dass  $h$  stetig ist.

**Hinweis:** Finden Sie eine explizite Formel für  $\max\{a, b\}$ , welche nur Summen, Produkte, Divisionen und den Betrag  $|\cdot|$  verwendet. Ein Resultat aus der Vorlesung hilft Ihnen, dann Stetigkeit zu folgern. Ein direkter Beweis funktioniert aber auch.