### 4.1. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

**(a)** $\lim_{x\to 1, x>1} \frac{x^2+19x-20}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}$,

**(b)** $\lim_{x\to 1, x<1} \frac{x^2+19x-20}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}$,

**(c)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

**(d)** $\lim_{x\to 0} \sin\left(\pi \cos\left(\sin(x)\right)\right)$,

**(e)** $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^8}}$,

**(f)** $\lim_{x\to \infty} e^{x\sin(x)}$,

**(g)** $\lim_{x\to \infty} \frac{x\cos(e^x)}{1+x^2}$,

**(h)** $\lim_{x\to \infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\log(x)}$,

**(i)** $\lim_{x\to 1, x>1} \log(x)\log(\log(x))$

**Hinweis:** Dies sind sehr viele Grenzwerte, welche unterschiedliche Techniken illustrieren. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle lösen, einige können Sie auch zur Repetition in einigen Wochen übrig lassen.

### 4.2. Konvergenz

Seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = c, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

**(a)** Angenommen $c > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)g(x)) = -\infty.$$

**(b)** Angenommen $c = 0$. Geben Sie je ein Beispiel, wo

(i) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = \infty$.

(ii) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = 1$.

(iii) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = 0$.

## 4.3. Gleichmässige Konvergenz

Wir betrachten die Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq n \\ x-n, & \text{if } n < x < n+1 \\ 1, & \text{if } n+1 \leq x \end{cases}$$

**(a)** Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Grenzfunktion $f(x) = 0$.

**(b)** Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

**(c)** Man betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[-R, R]$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmässig auf $[-R, R]$ konvergiert.

## 4.4. Trigonometrische Formeln

Zeigen Sie die Identitäten

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

**Hinweis:** Benutzen Sie die Eulersche Formel $\exp(ix)^k = \cos(kx) + i\sin(kx)$ für $x \in \mathbb{R}$, sowie:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

für $z \in \mathbb{C}$.