5.1. Potenzreihen und Ableitungen

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Identität zu beweisen:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \forall x \in]-1,1[$$

(a) Berechnen Sie mittels Prop. 5.1.6 die Ableitung der Funktion:

$$\frac{1}{1-x}$$

(b) Berechnen Sie nun die Ableitung derselben Funktion mittels Theorem 5.2.2 sowie der geometrischen Reihendarstellung:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

(c) Folgern Sie die Identität aus der Aufgabenstellung durch Kombinieren der vorherigen Berechnungen.

5.2. Potenzen von Betragsfunktionen

Sei $\alpha > -1$. Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto |x|^{\alpha+1}\,.$$

Bestimmen Sie, für welche α die Ableitung von f_α an der Stelle 0 existiert.

Hinweis: Man erinnere sich an die Formel:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

5.3. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1,2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Hinweis: Man erinnere sich, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall stets sein Maximum und Minimum annimmt.

5.4. Abschätzungen aus Ableitungen

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ sowie $f'(x) \geq g'(x)$, für alle $x \in]a, b[$.

(a) Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Falls sogar $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in]a, b[$, so zeige man ferner:

$$f(x) > g(x), \quad \forall x \in]a, b]$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$1 - \frac{1}{x} < \log(x) < x - 1, \quad \forall x > 1$$