2

<u>Formel:</u> $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le n$

[1.6.13] $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

[<u>z. B.</u> $$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\,\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2}$$]

<u>Beweis:</u> Übung

(Idee: Induktion; rechte Seite $c(n,k)$ erfüllt
$c(n+1,k) = c(n,k) + c(n,k-1)$
...

Kapitel 2

Konstruktion / Approximation von reellen Zahlen

Ziel:

- wie kann man viele "interessante" reellen Zahlen definieren?
- wie kann man reellen Zahlen mit rationale Zahlen approximieren?
  [z.B. $\sqrt{2} \approx 1.4142\ldots$]
- die Dezimalentwicklung einer reelle Zahl

1. Intervalle

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge "zwischen zwei Zahlen (oder grösser / kleiner als eine Zahl)"

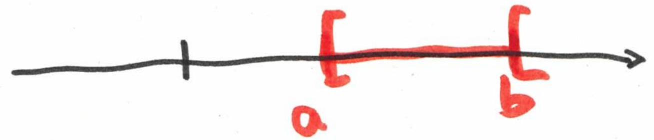
Notation:

$(a \leq b)$

("beschränkte Intervalle")

$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$



$]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

$$[a, +\infty[\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$$

"plus Unendlich"

$$]a, +\infty[\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$$

$$]-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$$

$$]-\infty, a[\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$$

(**Bemerkung:** USA $[a, b)$ anstatt $[a, b[$

$[a, b]$ = $[a, b]$

$(a, b]$ anstatt $]a, b]$)

$$]-\infty, +\infty[\; = \mathbb{R}$$

Mau sagt dass ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist:

(1) <u>abgeschlossen</u> wenn die Ungleichung sind $\leq$ oder $\geq$

<u>d.h.</u> $[a, b]$

$[a, +\infty[$

$]-\infty, a]$

$\mathbb{R}$

(2) <u>offen</u> wenn die Ungleichungen sind $<$ oder $>$

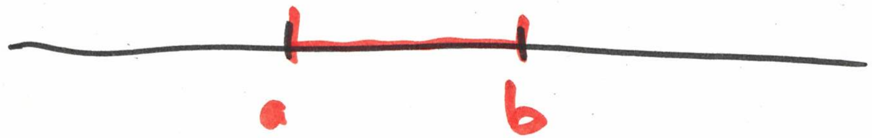
<u>d.h.</u> $]a, b[$

$]a, +\infty[$

$]-\infty, a[$

$\mathbb{R}$

Satz. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall $\Leftrightarrow$ „I hat keine Lücke", d.h. falls $a \leq b$, a, b in I, folgt $[a,b] \subset I$ (alle c mit $a \leq c \leq b$ gehören I).



(Die Richtung $\Rightarrow$ ist einfach.)

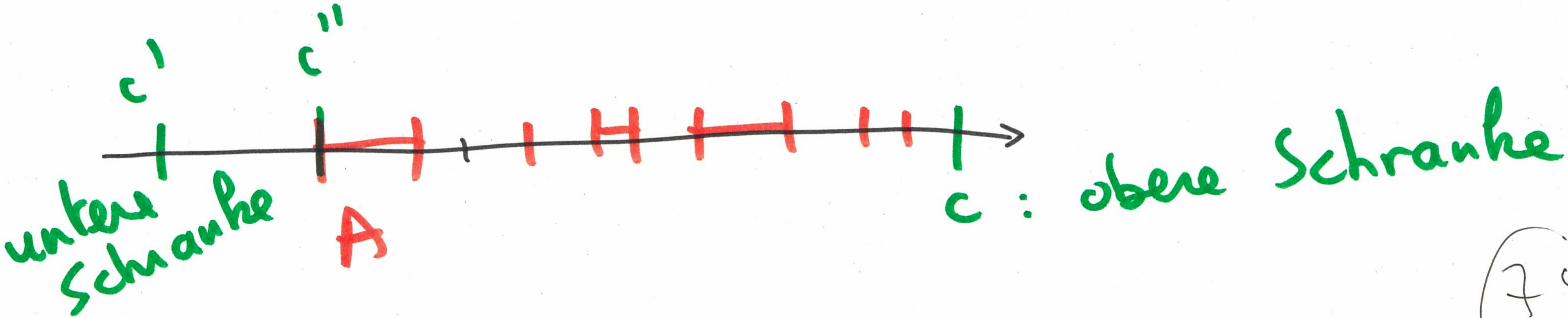
[$A \Leftrightarrow B$ bedeutet $(A \Rightarrow B) \wedge (B \to A)$; „die Richtung $\Rightarrow$" ist dann die Aussage „$A \to B$"]

2. Untere und obere Schranken, Maximum und Minimum

Def.: Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

c ist eine obere Schranke von A (bzw. untere Schranke)

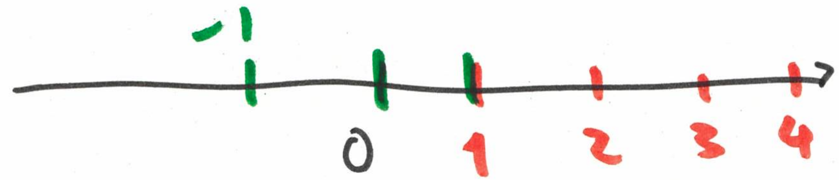
wenn alle $a \in A$ erfüllen $a \leq c$ (bzw. $c \leq a$)



Bsp.

(1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hat keine obere Schranke

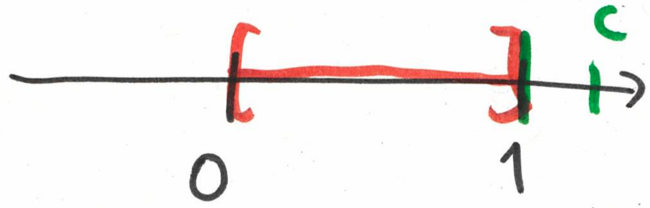
$(0 \notin \mathbb{N})$



$0, 1, -1, \ldots$ sind untere Schranken von $\mathbb{N}$

(2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ hat keine obere Schranke und keine untere Schranke

(3) $A := [0,1]$



Alle $c \geq 1$ sind obere Schranken von A

Keine andere Zahl ist eine obere Schranke:

$c < 1 \in A$ bedeutet c ist <u>nicht</u> eine obere Schranke

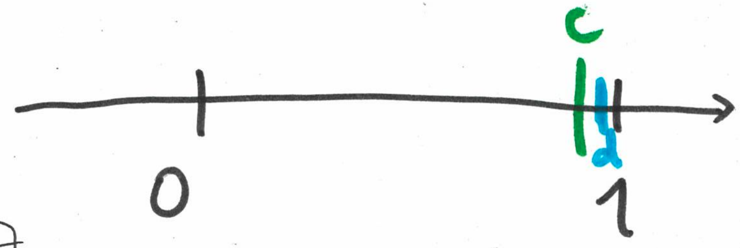
Die untere Schranken sind die Zahlen $c \leq 0$.

(4) $A =]0,1[$

Die $\left\{ \begin{array}{l} \text{obere Schranken sind die } c \geq 1 \\ \text{untere \_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_ } c \leq 0 \end{array} \right.$

$c \geq 1 \Rightarrow c$ eine obere Schranke ist

$c < 1$?



$d = \frac{1+c}{2}$ ist in A, grösser als c, s.d

c <u>nicht</u> eine obere Schranke von A ist.

<u>Def.</u> $A \subset \mathbb{R}$

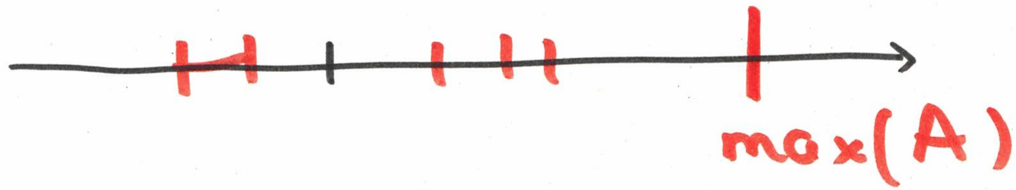
<u>Falls</u> A hat eine obere (bzw. untere) Schranke a in A, sagt man das a das Maximum (bzw. Minimum) von A ist, bezeichnet $a = \text{Max}(A)$.

<u>z.B.</u> $\max([0,1]) = 1$; $]0,1[$ hat kein Maximum

$\max([a,b]) = b$

$\min([a,b]) = a$

Wenn $\max(A)$ existiert, $a := \operatorname{Max}(A)$, folgt alle $a' \in A$ sind $a' \leq a$; insb ist a eindeutig.



Dann sind die obere Schranken von A die Zahlen $\geq \max(A)$; das Maximum ist die kleinste obere Schranke.

3 - ~~Ba~~ Infimum / Supremum / Vollständigkeit

Nicht viel Mengen $A \subset \mathbb{R}$ haben ein Maximum, obwohl sie eine obere Schranke haben.

Satz - [2.3.1] $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

Falls A eine obere Schranke hat (bzw. eine untere Schranke) hat A eine "beste obere Schranke", d.h. eine kleinste, d.h. die Menge $M = \{c \in \mathbb{R} \mid c \text{ ist eine obere Schranke von } A\}$ hat ein Minimum

$\min(M) =$ das Supremum von $A = \sup(A)$

[bzw. $M' = \{ c \in \mathbb{R} \mid c$ eine untere Schranke von $A \}$ hat ein Maximum, $\max(M')$ = das Infimum von A $= \operatorname{Inf}(A)$]

Bsp.

$$A =]0, 1[$$

$$M = \{ c \in \mathbb{R} \mid c \geq 1 \}$$

$$= [1, +\infty[$$

$$\operatorname{Min}(M) = 1$$

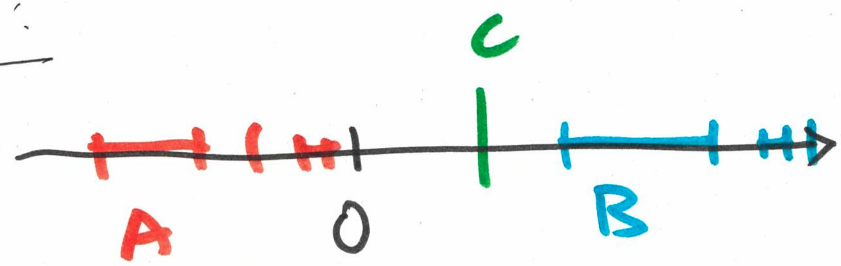
$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Sup}(A) = 1$$

$$B = [0, 1]$$

$$\operatorname{Sup}(B) = 1 = \operatorname{Max}(B)$$

Beweis. Wichtig ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$!

<u>Erinnerung:</u>



$\emptyset \neq A, B \neq \emptyset$ "getrennt" $\Rightarrow \exists\, c$ "in der Mitte"

$A \neq \emptyset$

Sei $B = M = \{ c \in \mathbb{R} \mid c \text{ obere Schranke von } A \}$

<u>Hyp.</u> $B \neq \emptyset$

Jede $b \in B$ ist eine obere Schranke von A sodass $b \geq a$ für alle $a \in A$

Sei c "zwischen A und B".

D.h. für alle $a \in A$, $b \in B$

$$\boxed{a \le c} \;\; \boxed{c \le b}$$

c ist eine obere Schranke von A : $c \in B$

c ist die kleinste obere Schranke

d.h. $c = \mathrm{Min}(B)$.

---

z.B. $\sqrt{2}$ als Supremum einer Menge

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \ge 0,\; x^2 \le 2\} \subset \mathbb{Q}$$

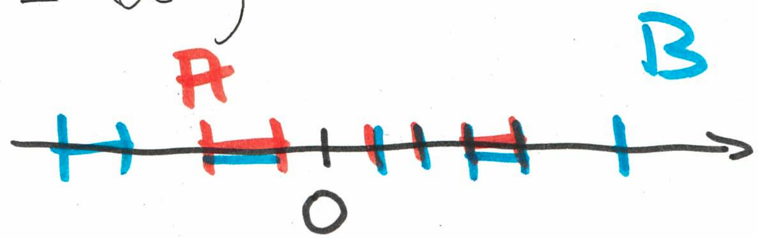
Es gilt: $\mathrm{Sup}(A) = \sqrt{2}$ (Bsp. 2.3.2 (3))

Notation:

Falls $A \subset \mathbb{R}$ und A hat keine obere Schranke (bzw. untere Schranke) bezeichnen wir

$$\mathrm{Sup}(A) = +\infty$$

$$(\text{bzw. } \mathrm{Inf}(A) = -\infty)$$



Eigenschaften:

(1) Falls $\emptyset \neq A \subset B$ folgt:

(1) wenn B von oben Beschränkt ist, so ist A,

$$\mathrm{Sup}(A) \leq \mathrm{Sup}(B)$$

(2) wenn ~~B~~ B von unten Beschränkt ist, so ist ~~B~~ A

$$\mathrm{Inf}(B) \leq \mathrm{Inf}(A)$$

83

__Bsp.__ $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{N}$: von unten Beschränkt

$\mathbb{R}$: nicht von unten/oben Beschränkt

(2) Falls A ein Maximum (bzw. Minimum) hat, hat A ein Supremum (Infimum) und

$$\mathrm{Max}(A) = \mathrm{Sup}(A)$$

$$\left(\text{bzw. } \mathrm{Min}(A) = \mathrm{Inf}(A)\right)$$

Zusammenfassung:

$\emptyset \neq A$, $\quad A \subset \mathbb{R}$, $\quad A$ hat eine obere Schranke

$c \in \mathbb{R}$

Wie beweist man dass $\boxed{c = \operatorname{Sup}(A)}$?

(1) Zuerst überprüfen, dass $\boxed{c \geq a \quad \text{für alle} \quad a \in A}$

[d.h. c ist eine obere Schranke]

d.h. $\boxed{c \geq \operatorname{Sup}(A)}$

(2) Dann überprüfen dass $\boxed{\text{wenn}}$ $\boxed{d < c, \text{ es gibt } a \in A \text{ mit } d < a}$

[d.h. d ist nicht eine obere Schranke]

d.h. $\boxed{c \leq \operatorname{Sup}(A)}$