Kap. 5 – Zusammenfassung

1. Def. von f' als Grenzwert
   (um Grenzwerte zu berechnen)
   z.B. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = 1$
2. Rechenregeln (insb. Leibniz, Kettenregel)
3. f differenzierbar $\longrightarrow$ f ist stetig
4. Mittelwertsatz und Anwendungen
   ↳ Kriterium für ein lokales Max./Min (+ Kriterium mit Taylor Polynome)
   ↳ Monotonie
5. $C^k(I)$
6. Konvexität + Kriterium mit $f'' \geq 0$
7. Taylor-Polynome + Lagrange Formel + Anwendungen für Grenzwerte $\frac{f(x)}{g(x)} \to ?$

Kap. 6

Integralrechnung

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ in I

Ziel: „$\int_a^b g(t)\,dt$" definieren

Anwendungen:

- eine Funktion finden mit eine gegebene Ableitung
- neue Funktionen definieren ($\underline{z.B}$ Γ Funktion)
- Flächeninhalte definieren (und berechnen), Länge von Kurven definieren und berechnen
- Für eine periodische Funktion $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, Zahlen a_n, b_n finden sodass $f = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

. . . .

6.1. Stammfunktionen

Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst <u>Stammfunktion</u> von g wenn f ist auf I differenzierbar und $f' = g$.

Notation: "$\int g = f$"

[z.B. $\int e^x = e^x$, $\int \cos(x) = \sin(x) \ldots$]

352

Satz. Sei $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Falls g eine Stammfunktion f hat.

(1) Alle Stammfunktionen von g sind

$$f + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

(2) Für **alle** $x_0 \in I$, es gibt **genau eine** Stammfunktion f_{x_0} von g sodass

$$f_{x_0}(x_0) = 0$$

Notation: $$\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt = f_{x_0}(x)$$

[z.B. $\int_{x_0}^{x_0} g(t)\, dt = 0$]

Warum? (1) Sei f_1 eine Stammfunktion von g.

Dann gilt $(f_1 - f)' = g - g = 0$

$\Rightarrow f_1 - f$ ist konstant, $f_1 - f = c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1 = f + c$

(2) Sei $f_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0)$

f_{x_0} ist eine Stammfunktion von g mit

$f_{x_0}(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

Falls f_1 Stammfunktion von g mit $f_1(x_0) = 0$

(1) $\Rightarrow$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $f_1 = f + c$; und

$0 = f_1(x_0) = f(x_0) + c \Rightarrow c = -f(x_0)$

z. B.

$n \in \mathbb{N}_0$, $$\int_0^x t^n \, dt = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\int_1^x \frac{1}{t} \, dt = \log(x)$$

$$\int_0^x e^t \, dt = e^x - 1$$

$$\int_{x_0}^x f'(t) \, dt = f(x) - f(x_0)$$

(f differenzierbar)

Satz – $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$g_1, g_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$

1. **Falls** g_1, g_2 Stammfunktionen haben, und a, b in $\mathbb{R}$ Zahlen sind, dann hat

$$a g_1 + b g_2$$

eine Stammfunktion, und

für alle x_0, x:
$$\int_{x_0}^{x} (a g_1(t) + b g_2(t))\, dt = a \int_{x_0}^{x} g_1(t)\, dt + b \int_{x_0}^{x} g_2(t)\, dt$$

("Linearität")

(2) ["Partielle Integration"]

Falls g_1, g_2 differenzierbar auf I sind,

<u>und</u> $g_1 g_2'$ eine Stammfunktion hat

$\Longrightarrow$ $g_1' g_2$ hat Stammfunktionen und

$$\int_{x_0}^{x} g_1'(t)\, g_2(t)\, dt = g_1(x) g_2(x) - g_1(x_0) g_2(x_0) - \int_{x_0}^{x} g_1(t)\, g_2'(t)\, dt$$

$$\left[g_1 g_2 \right]_{x_0}^{x}$$

<u>Notation</u>: $\left[g(t) \right]_{x_0}^{x} = g(x) - g(x_0)$

Warum?

$$(g_1 g_2)' = g_1' g_2 + g_1 g_2' \quad \text{(Leibniz)}$$

$\Rightarrow$ falls $g_1 g_2' = f'$ ist

$(g_1 g_2) - f$

eine Stammfunktion für $g_1' g_2$

Beispiele

(1) Alle Polynome

$$g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

haben Stammfunktionen:

$$\int g = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x$$

(2) $g(x) = \log(x)$

$$\int_1^x g(t)\, dt = \int_1^x \log(t)\, dt$$

Trick:

$$\log(t) = 1 \cdot \log(t) = g_1'(t)\, g_2(t) \quad \text{wo } \begin{cases} g_1(x) = x \\ g_2(x) = \log(x) \end{cases}$$

Part. Int. $\rightarrow$

$$\int_1^x \log(t)\,dt = \Big[\, t\log(t) \,\Big]_1^x - \int_1^x \cancel{t} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\,dt$$

$$= x\log(x) - (x-1)$$

Bemerkung: man überprüft dass man kein Fehler gemacht hat, wenn man am Ende weiter ableitet [hier: $x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \log(x) - 1 = \log(x)$]

360

(3)

$$\int_0^x \underbrace{te^t}_{= g_2(t)\,g_1'(t)} dt = \left[e^t t\right]_0^x - \int_0^x e^t\,dt$$

$$\begin{cases} g_1(t) = e^t \\ g_2(t) = t \end{cases}$$

$$= xe^x - (e^x - 1)$$

Satz – ["Substitutionsregel"]

$I, J \subset \mathbb{R}$ Intervallen

$h : I \longrightarrow J, \quad g : J \longrightarrow \mathbb{R}$

Falls $\begin{cases} \cdot\ h \text{ differenzierbar ist} \\ \cdot\ g \text{ eine Stammfunktion hat} \end{cases}$

Dann hat

multipliziert

$$h' \cdot (g \circ h)$$

Stammfunktionen und

$$\int_{x_0}^{x} h'(t)\, g(h(t))\, dt = \int_{h(x_0)}^{h(x)} g(t)\, dt$$

__Bem.__ __Warum__ "Substitutionsregel"?

wir ersetzen $u = h(t)$, $du = \boxed{h'(t)\, dt}$

$$\longrightarrow \int_{x_0}^{x} h'(t)\, g(h(t))\, dt = \int_{h(x_0)}^{h(x)} g(u)\, du$$

[Warum gilt diese ~~Regle~~ Regel?

falls $f' = g$, gilt (Kettenregel)

$$(f \circ h)' = h' \cdot (f' \circ h) = h' \cdot (g \circ h)$$

]

Beispiele:

(1) $$g(x) = x e^{x^2}$$

Partielle Int. funktioniert hier nicht!

Aber:

$$g(x) = \frac{1}{2} 2x e^{x^2}$$
$$= \frac{1}{2} h'(x) e^{h(x)}$$

Substitutionsregel:

$u = t^2$, $du = 2t\,dt$

$$\int_0^x t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} e^u \, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - 1\right)$$

(2) <u>Substitution</u> $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

$u = at + b$

$du = \cancel{dt}\ a\,dt$

$$\int g(at+b) \text{ “}=\text{” } \frac{1}{a}\int g(u)$$

$$\left[\ \int_{x_0}^{x} g(at+b)\,dt = \frac{1}{a}\int_{ax_0+b}^{ax+b} g(u)\,du\ \right]$$

$u = at + b$

$du = a\,dt$

(3) Stammfunktion für $\boxed{e^{-x^2}}$?

Man kann beweisen:

1) es gibt eine Stammfunktion f

2) f ist keine <u>elementäre Funktion</u>

(Liouville, 19 Jhr)

(4) $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt$; $-1 \leq x_0 \leq x \leq 1$

Wir sehen nicht klar eine Funktion der Form $h' \cdot g \circ h$.

Wegen $\sqrt{1-t^2}$, versuchen wir

$$t = \cos(u) \iff u = \arccos(t)$$
mit $u \in [0, \pi]$

zu schreiben.

$t = \cos(u) \Longrightarrow dt = -\sin(u)\, du$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos(u)^2}$$
$$= \sin(u)$$

weil $0 \leq u \leq \pi$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt = -\int_{\arccos(x_0)}^{\arccos(x)} \sin^2(u)\, du$$

$\sin^2(u)$ kann man als Kombination von $\sin(u)$, $\sin(2u)$, $\cos(u)$, $\cos(2u)$ schreiben:

$$\left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2iu} - 2 + e^{-2iu}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(2u) - 1\right)$$

$$\int \cos(2u) = \frac{1}{2}\sin(2u)$$

$\leadsto$ wir können $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt$ berechnen.