6.2. Das Integral für "Regelfunktionen"

Idee: man kann beweisen:

falls (g_n), $g_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cdot\ g_n \text{ hat Stammfunktion } f_n \\ \cdot\ g_n \longrightarrow g \ \underline{\text{gleichmässig}} \text{ auf } I \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ g hat Stammfunktion, und

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} g_n(t)\, dt \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

Anstatt Polynome, benutzen wir <u>Steppenfunktionen</u>

<u>Def.</u> $s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst <u>Steppenfunktion</u> falls:

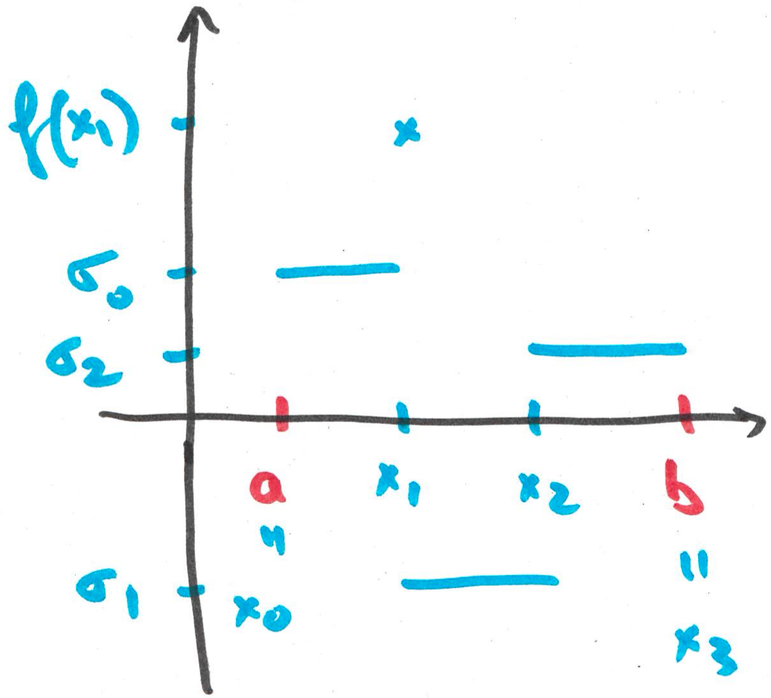
es gibt $k \in \mathbb{N}$ und

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$

und $\sigma_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq k-1$

sodass

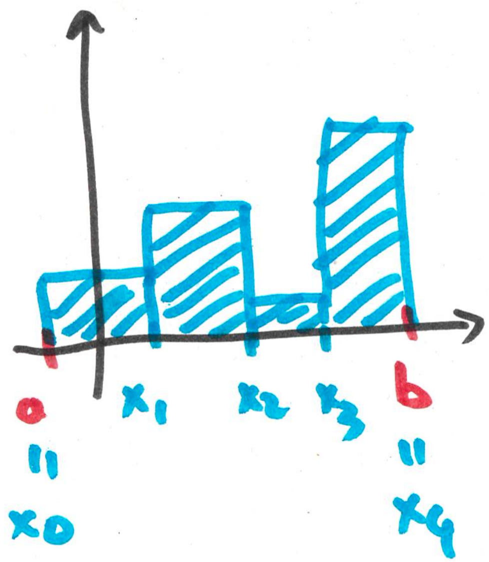
$f(x) = \sigma_i$ falls $x_i < x < \cancel{x}_{i+1}$.



Dann definieren wir:

$$\int_a^b s(t)\,dt = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \sigma_i (x_{i+1} - x_i)}_{\text{Summe}} \in \mathbb{R}$$

Geometrische Interpretation: falls $s \geq 0$



$$\int_a^b s(t)\,dt = \text{Flächeninhalt}$$

von

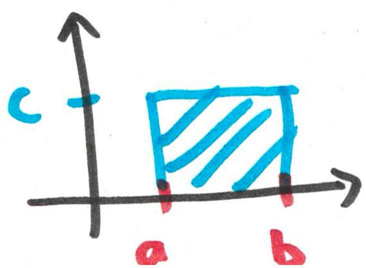
$$C_s = \left\{ (x,y) \;\middle|\; a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq s(x) \right\}$$

Beispiel:

$s(x) = c$ auf $[a,b]$

s hat Stammfunktion cx

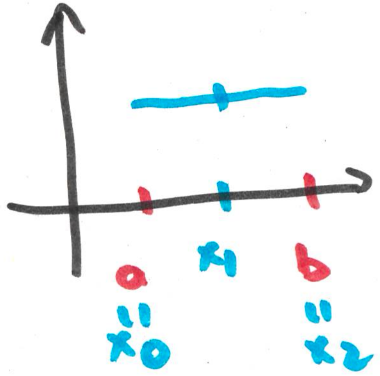
$$\int_a^b s(t)\,dt \underset{\text{Stamm.}}{=} c\,(b-a) \underset{\text{Treppen.}}{=} \int_a^b s(t)\,dt$$



Satz: $I = [a,b]$, $a < b$

(1) Falls s Steppenfunktion auf I ist, $\int_a^b s(t)\,dt$ hängt nicht vom Wahl der Verteilung

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$



$\sigma_0 = \sigma_1 = c$

(2) Für s_1, s_2 Steppenfunktionen ist $s_1 + s_2$ auch eine Steppenf. und

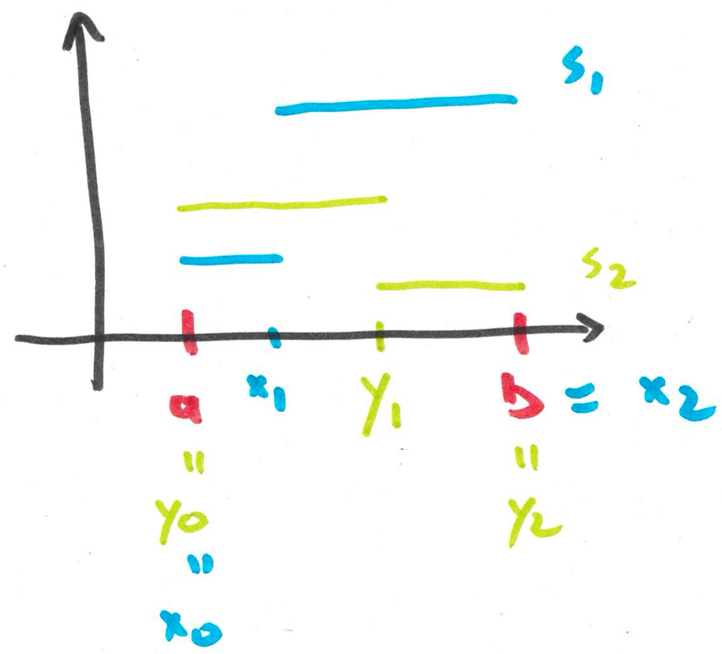
$$\int_a^b (s_1(t) + s_2(t))\,dt = \int_a^b s_1(t)\,dt + \int_a^b s_2(t)\,dt$$

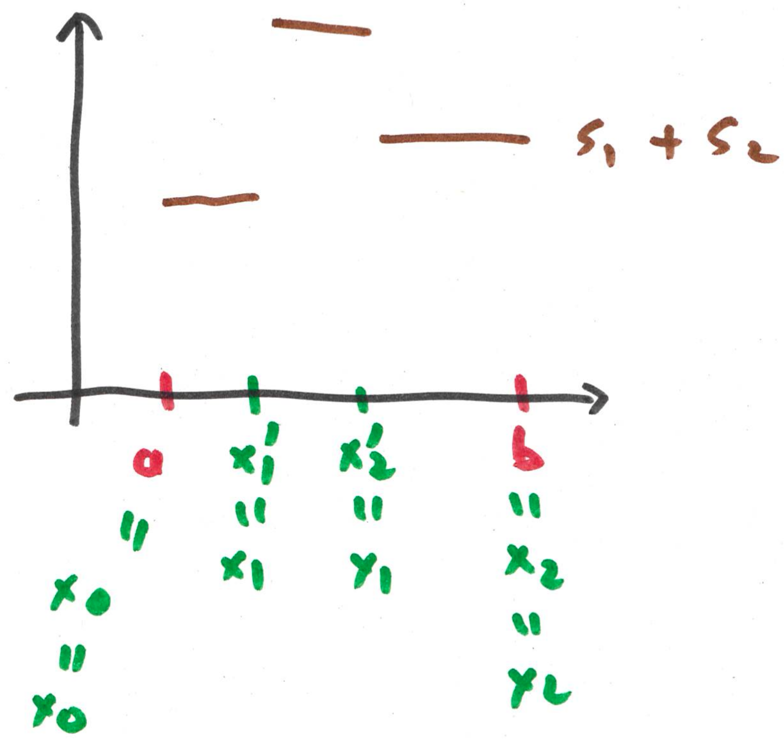
(3) s Steppenfunktion $\Rightarrow$ $|s|$ ist steppen., und s ist beschränkt und

(Dreiecksungl.) $$\left|\int_a^b s(t)\,dt\right| \le \int_a^b |s(t)|\,dt \le M(b-a),$$

wo $|s(t)| \le M$ für alle t.

Warum gilt (2):





Steppenfunktion

$\Rightarrow$ s_1, s_2, $s_1 + s_2$ sind auf $]x'_i, x'_{i+1}[$ alle drei Konstanten $\Rightarrow$ das Resultat folgt leicht

Erinnerung: I Intervall

(g_n) konv. gleichmässig gegen g auf I

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \forall n \geq N,$

$|g_n(t) - g(t)| < \varepsilon$

Def. $I = [a,b]$, $a < b$

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Regelfunktion

wenn es gibt $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $s_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Steppenfunktion, sodass $s_n \longrightarrow g$ gleichmässig.

__Satz 1.__ Für $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion,

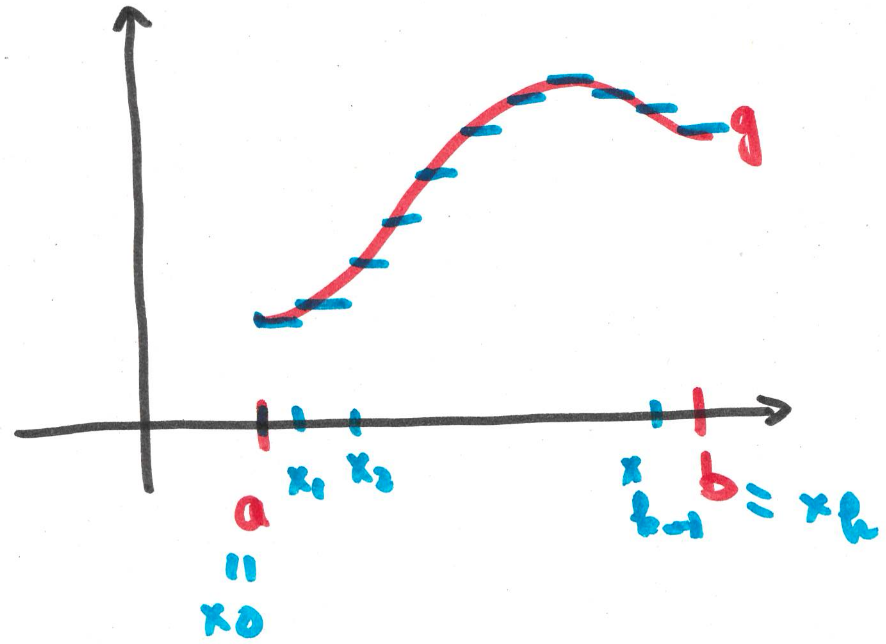
und $g = \lim s_n$ (gleichmässig), es gibt $x \in \mathbb{R}$, $\int_a^b s_n(t)\,dt \longrightarrow x$, x hängt NICHT vom Wahl von (s_n) ab.

__Def.__ g Regelfunktion auf I; $\boxed{\int_a^b g(t)\,dt = x}$

__Satz 2.__ Jede ~~[illegible]~~ stetige $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ __ist__ eine Regelfunktion

__D.h.__ $\int_a^b g(t)\,dt$ __existiert__ für alle stetige Funktionen g.

Warum gilt Satz 2?



$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(t) \approx g(a)$ für

$a \leq t \leq x_1$

(z.B. $|g(t) - g(a)| < \varepsilon$)

$g(t) \approx g(x_1)$ für

$x_1 \leq t \leq x_2$

$\vdots$

$g(t) \approx g(x_i)$ für

$x_i \leq t \leq x_{i+1}$

$\rightarrow$ s_ε definiert

$\rightsquigarrow$ $|g(t) - s_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ $1/n$

$1/n$ für alle t

$\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \to \infty$

376

__Problem:__ wie kann man sichern, dass nur endlich viele x_i benutzt sind?

__Def.__ $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst __gleichmässig stetig__ falls:

stetig

für alle $\varepsilon > 0$, es gibt $\delta > 0$, für alle $x \in I$, $y \in I$,

wenn $|x - y| < \delta$, ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$\left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, \left(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right)\right]$$

"δ hängt __nicht__ von x ab": gleichmässig

Satz. [6.2.7]

$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow$ g ist

gleichmässig stetig.

(Beweis im Skript).

$\overset{\longrightarrow}{1}$

Beweis von Satz ~~…~~:

① $I=[a,b]$; $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktionen

(s_n) steppenfunktionnen auf I

$s_n \longrightarrow g$ gleichmässig

$$x_n = \int_a^b s_n(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

Cauchy Kriterium:

(x_n) konvergiert $\iff$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m$ sodass $n \geq N,\ m \geq N,$

ist $|x_n - x_m| < \varepsilon$

$$x_n - x_m = \int_a^b s_n(t)\,dt - \int_a^b s_m(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (s_n(t) - s_m(t))\,dt$$

$$|x_n - x_m| = \left| \int_a^b (s_n(t) - s_m(t))\,dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |s_n(t) - s_m(t)|\,dt \leq M_{n,m}\,(b-a)$$

(Dreiecksungleichung)

wo $M_{n,m}$ ist sodass

$$|s_n(t) - s_m(t)| \leq M_{n,m}, \quad t \in [a,b]$$

Gleichmässig ~~K~~Konvergenz (+ Cauchy Kriterium)

$\Rightarrow$ für $\varepsilon > 0$, es gibt $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left\{\begin{array}{l}\text{für alle } t \in I, \\ \text{für alle } n,m \geq N\end{array}\right\} |s_n(t) - s_m(t)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ für $n, m \geq N$ ist $M_{n,m} < \varepsilon$

und $|x_n - x_m| \leq (b-a)\varepsilon$

<u>D. h.</u> (x_n) ist eine Cauchy Folge; sie <u>konvergiert.</u>

(2) __Ziel:__ $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\,dt$ hängt __nicht__ vom Wahl der Folge (s_n).

__Trick:__ seien $\begin{cases} s_n \longrightarrow g & (\text{gleich.}) \\ u_n \longrightarrow g & (\text{gleich.}) \end{cases}$

Wir definieren $v_n \begin{cases} v_{2n} = s_n \\ v_{2n+1} = u_n \end{cases}$

Weil $\underset{(\text{gleich.})}{s_n \to g}$, $\underset{(\text{gleich.})}{u_n \longrightarrow g}$, folgt $\underset{(\text{gleich.})}{v_n \longrightarrow g}$

(1) $\Longrightarrow$ $\int_a^b v_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$\quad\quad\quad\quad ||$

$$\begin{cases} \int_a^b s_{\frac{n}{2}}(t)\,dt, & n \text{ gerade Zahl} \\ \int_a^b u_{\frac{n-1}{2}}(t)\,dt, & n \text{ ungerade Zahl} \end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow \quad \int_a^b s_{\frac{n}{2}}(t)\,dt \longrightarrow x$$

$$\int_a^b u_{\frac{n-1}{2}}(t)\,dt \longrightarrow x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim \int_a^b s_n(t)\,dt = \lim \int_a^b u_n(t)\,dt}$$

__Def.__ $I = [a,b]$, $a < b$

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion

(z.B. stetige Funktion)

$$\int_a^b g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\,dt$$

wo (s_n) ist eine Folge von Steppenfunktionen die <u>gleichmässig</u> gegen g konvergiert.

<u>Weiter</u>: wenn $a > b$

$$\int_a^b g(t)\,dt \overset{\text{Def}}{=} -\int_b^a g(t)\,dt$$

und

$$\int_a^a g(t)\,dt = 0$$

[z.B. $\int_0^{-1} g(t)\,dt = -\int_{-1}^{0} g(t)\,dt$]

Def. $I = [a, b]$, $a < b$

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion

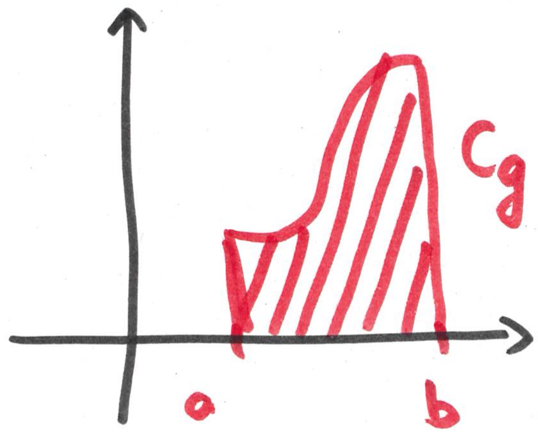
$g \geq 0$

Der **Flächeninhalt** von

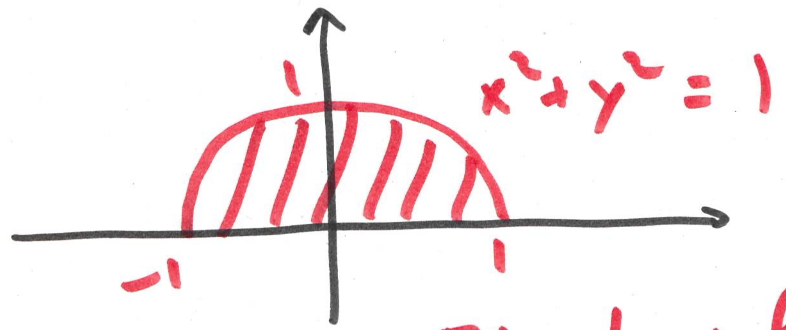
$C_g = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x) \}$

ist **definiert** als

$\int_a^b g(t)\, dt$



z.B.



Flächeninhalt $= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt$

Zentralsatz der Analysis: (6.2.12)

$I = [a,b]$

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann ist die Funktion $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

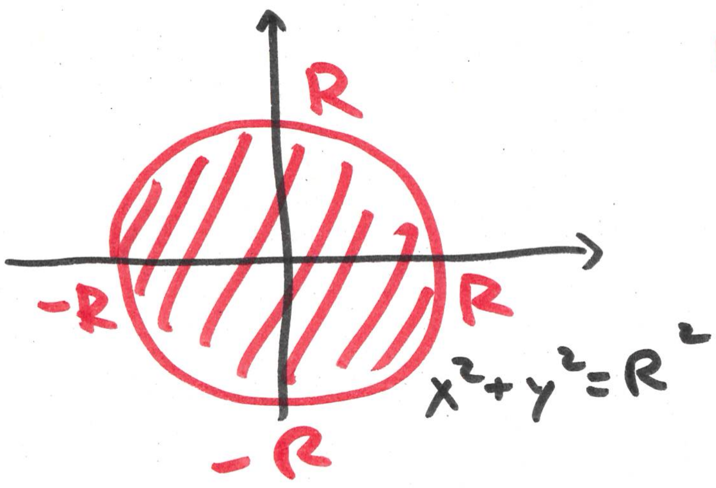
$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

differenzierbar auf I, und $f' = g$

(d.h. f ist eine Stammfunktion von g).

Kor. Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion.

<u>Beispiel</u>: Flächeninhalt $A(R)$ einer Kreisscheibe mit Radius $R > 0$:



$$A(R) = 2\,(\text{Flächeninh. für Halb.})$$

$$= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}\, dt$$

Subst. $t = Ru$ $\quad = 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt$

Zentralsatz $\quad = 2R^2\,(f(1) - f(-1))$

wo f ist Stammfunktion von

$$g(t) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad A(R) = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\| \qquad \cancel{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt}$$

$$f(1) - f(-1)$$

$$\boxed{A(R) = \pi R^2}$$