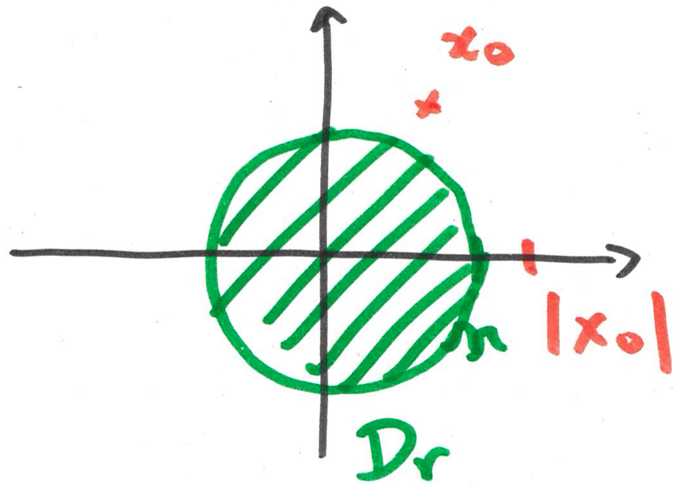
__Weiter:__ für $|x| < |x_0|$ konvergiert $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ absolut.



__Kor.__ Die Summe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ist auf $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < |x_0|\}$ stetig.

[weil für $|x| < |x_0|$, es gibt $r < |x_0|$ sodass $x \in D_r$]

Beweis der normal konvergenz auf D_r:

$$D_r = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| \le r \}, \quad \text{mit } \underline{\underline{r < |x_0|}}$$

Weil $\sum a_n x_0^n$ konvergiert ist $|a_n x_0^n|$ beschränkt,

sei $M \in \mathbb{R}_+$ mit $|a_n x_0^n| \le M$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Für $x \in D_r$:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \left(\frac{x}{x_0} \right) \right|^n$$

$$\le \underbrace{M \left(\frac{r}{|x_0|} \right)^n}_{\substack{\text{konvergiert für } r < |x_0| \\ \text{(geometrische Reihe)}}}$$

$\Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert normal auf D_r.

Def. (~~Rad~~ Konvergenzradius)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{C}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

(1) die Potenzreihe konvergiert für mindestens eine Zahl x mit $|x| = r$, für alle $r \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow$ $\sum a_n x^n$ konvergiert für $x \in \mathbb{C}$ (und ist stetig) $\underline{\underline{\text{Def}}}$ $\boxed{R = +\infty}$ [Bsp: $a_n = \frac{1}{n!}$]

(2) die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$

$\underline{\underline{\text{Def.}}}$ $\boxed{R = 0}$.

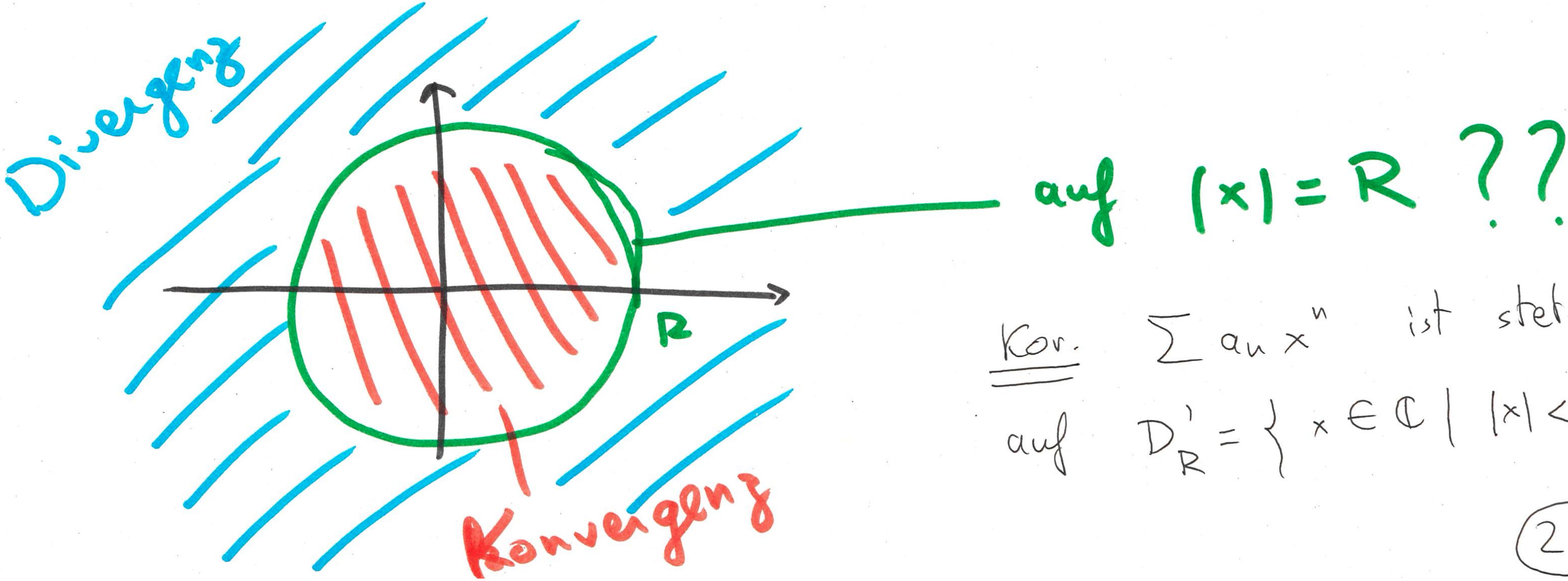
(3) $X = \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists\, x_0 \neq 0,\ \sum a_n x_0^n,\ |x_0| = r \} \neq \emptyset$, beschränkt

$\boxed{\underline{\underline{\text{Def.}}}\ R = \sup X} > 0$ [Bsp. $\sum x^n$, $R = 1$]

Kor. 4.3.3 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, R = Konvergenzradius von $\sum a_n x^n$

(1) Für $0 \leq r < R$, $\sum a_n x^n$ konvergiert normal auf $D_r = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r \}$

(2) Für $|x| > R$, $\sum a_n x^n$ divergiert



Kor. $\sum a_n x^n$ ist stetig auf $D'_R = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| < R \}$

Beispiele

(1) $a_n = n!$

$$\sum a_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots$$

In diesem Fall: $\underline{R = 0}$ [Bsp 2.11.5]

weil für $x \in \mathbb{C},\ x \neq 0$

$$|n!\,x^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$$\left[\frac{1}{|n!\,x^n|} = \frac{1}{|x|^n n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right]$$

[z.B. $x = \frac{1}{2}$

$a_n x^n = n! \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{24}{16} = \frac{3}{2}, \frac{120}{32}, \frac{720}{64}, \dots$]

$\sum n!\,x^n$ divergiert

(2) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

$\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n \longrightarrow R \geq 1$ (wie für $\sum x^n$)

[<u>Bem.</u> Falls $|a_n| \leq |b_n|$, ist R für $\sum a_n x^n \geq$ das für $\sum b_n x^n$]

und $\sum \frac{x^n}{n}$ divergiert für $|x| > 1$

weil $\left|\frac{x^n}{n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ $\left(\Rightarrow \boxed{R=1}\right]$

$|x| = 1$? $\underline{x=1}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

$\underline{x=-1}$: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$ konvergiert (nicht absolut)

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ hat $R = +\infty$

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2^n}_{= a_n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n$ hat $\boxed{R = \frac{1}{2}}$

4.4. Exponential (auf $\mathbb{C}$)

Def. $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

ist $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

① exp ist stetig auf $\mathbb{C}$

② die Beschränkung von exp auf $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ [weil $\frac{1}{n!} \in \mathbb{R}$]

Satz (4.4.2) Für alle x, y in $\mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

Idee:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^m}{m!}\right) = ?$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{M} \frac{y^m}{m!} = \sum_{\substack{n=0\\ m=0}}^{N,\,M} \frac{x^n y^m}{m!\, m!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N+M} \left(\sum_{n+m=k} \frac{x^n y^m}{n!\, m!} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \le n \le N \\ 0 \le m \le M \end{pmatrix}$$

Man kann "$N = M = +\infty$" nehmen [4.4.3]:

D. k.

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{\substack{n+m=k \\ 0 \le n \\ 0 \le m}} \frac{x^n y^m}{n!\, m!} \right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n y^{k-n}}{n!\,(k-n)!}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!\,(k-n)!} x^n y^{k-n}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n}$$

$$= \frac{1}{k!} (x+y)^k$$

$$\left[\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!\,(k-n)!} \right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y)}$$

Kor. (4.4.4)

(1) $\exp(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{C}$, und $\dfrac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$.

[<u>weil</u> $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$]

(2) für alle $x \in \mathbb{C}$, $\exp(\overline{x}) = \overline{\exp(x)}$

[<u>weil</u> $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{x}^n}{n!} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)}$, weil die Funktion $c(x) = \overline{x}$ stetig ist]

(3) Für $x \in \mathbb{R}$ ist <u>$\exp(x) > 0$</u>, die Funktion $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is ~~streng~~ wachsend und

<u>$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$</u>, <u>$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$</u>

[weil: ① $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \geq 1$, $x \in \mathbb{R}_+$

und $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$, $x < 0$

---

② für $x < y$ in $\mathbb{R}$,

$$\exp(y) - \exp(x) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} \underbrace{\Big(\exp(\underbrace{y-x}_{\in \mathbb{R}_+}) - 1\Big)}_{\geq 0} > 0$$

>0 für $y > x$

---

③ $\exp(x) \geq 1 + x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad (x \geq 0)$

$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \quad (x < 0)$

(weil falls $f(x) \longrightarrow +\infty$, ist $\frac{1}{f(x)} \longrightarrow 0$)

Weil $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig + injektiv ist,

und das Bild ist $]0, +\infty[$, $\left[\begin{array}{l} \exp(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \\ \exp(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{array} \right]$

können wir:

<u>Def.</u> Der Logarithmus ist die <u>Umkehrfunktion</u>

(oder $\ln$) $\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

von $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$.

Es gilt: $\log$ ist
- streng wachsend
- stetig

$\log(1) = 0$ $\quad [\exp(0) = 1]$

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

[weil

$$ab = \exp(\log(ab)) = \exp(\log(a) + \log(b))$$
$$= \exp(\log(a)) \exp(\log(b))$$
$$= ab \,]$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a), \qquad a > 0$$

<u>Def.</u> (Potenzfunktionen)

$x > 0$, $a \in \mathbb{C}$

Wir <u>definieren</u>: $x^a = \exp(a \log(x))$.