Satz [4.4.7]

Seien $x > 0$, $y > 0$, $a, b \in \mathbb{C}$

Es gilt

$$x^{a+b} = x^a x^b$$

$$(xy)^a = x^a y^a$$

$$(x^a)^b = x^{ab}.$$

und wenn $a \in \mathbb{Z}$ ist x^a wie oben definiert dieselbe Zahl als x^a als Produkt/Inverse von x, $|a|$ mal definiert [$x^1 = x$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^3 = x \cdot x \cdot x \ldots$]

Def. Sei $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Es gilt $\exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{C}$.

Beweis:

$$x^{a+b} \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left((a+b)\log(x)\right)$$
$$= \exp\left(a\log(x) + b\log(x)\right)$$
$$= \exp\left(a\log(x)\right)\exp\left(b\log(x)\right)$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} x^a\, x^b$$

$$(x^a)^b = \exp\left(b\log(x^a)\right)$$
$$= \exp\left(b \cdot a\log(x)\right)$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} x^{ab}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x^a = \exp(a\log(x)) \\ \Downarrow \\ \log(x^a) = a\log(x) \end{gathered}}$$

$$(xy)^a = x^a y^a \quad : \quad \text{Übung}$$

$$x^1 = \exp(1 \cdot \log(x)) = x$$
$$x^{-1} = \exp(-\log(x)) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = x^{1+1} = x^1 \cdot x^1 = x \cdot x \;\text{"}{=}\; x^2\text{"}, \quad \text{Induktion für } k \in \mathbb{Z} \ldots$$

226

Sei $x \in \mathbb{C}$:

$$\exp(x) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x \cdot \log(e))$$
$$= e^x \qquad [e := \exp(1)]$$

<u>z.B.</u>

- $e^x e^y = e^{x+y}$
- $x^{1/2} = \sqrt{x}$ weil $\left(x^{1/2}\right)^2 = x^1 = x$ und $x^{1/2} > 0$
- Ähnlicherweise für $x^{1/k}$ für $k \in \mathbb{N}$

Bemerkungen:

(1) für $k \in \mathbb{Z}$, ist x^k auch für $x \in \mathbb{C}$ (oder $x \neq 0$, $k < 0$) definiert (als Produkt/Inverse ...)

(2) $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$

man überprüft $\left| e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{2}{n!}$

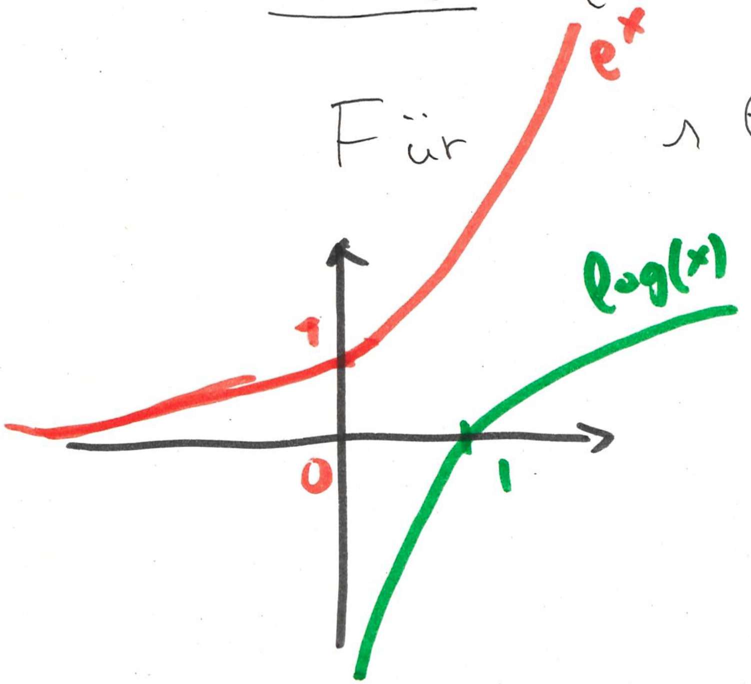
$\leadsto$ $e = 2{,}718281828 45\dots$

$e \notin \mathbb{Q}$ und e ist nicht [wie $\sqrt{2}$] eine Lösung einer Gleichung

$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

$\left(\begin{matrix} n \geq 1 \\ a_n \neq 0 \end{matrix}, \ a_i \in \mathbb{Q} \right)$

Satz (4.4.9)



Für $r \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^r e^{ax} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^r e^{-ax} = 0$$

Für $r > 0$, $a \geq 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^r \log(x)^a = 0$$

$$\left[\lim_{x \to 0} x \log(x) = 0 \right]$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to \infty} x^{-r} \log(x)^a = 0 \\ \lim_{x \to \infty} x^r \log(x)^a = +\infty \end{cases}$$

$$\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)^{10}}{\sqrt{x}} = 0 \right]$$

z. B. $(a>0)$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{100}} e^{ax} = +\infty}$

weil für $x \geq 0$ ist

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \dots + \frac{(ax)^n}{n!} + \dots$$

$$\geq \frac{(ax)^{101}}{(101)!}$$

feste Zahl

$$\rightsquigarrow \quad \frac{e^{ax}}{x^{100}} \geq \frac{a^{101}}{(101)!}\, x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

4.5 – Trigonometrische Funktionen

Def. $x \in \mathbb{C}$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
- $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$\Rightarrow$ $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{aligned} e^{ikx} &= (\cos(x) + i\sin(x))^k \\ &= \cos(kx) + i\sin(kx) \end{aligned}}$$

Satz. (4.5.2)

Für $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Insbesondere ist $\left.\begin{array}{l} \cos(x) \in \mathbb{R} \\ \sin(x) \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ für $x \in \mathbb{R}$

und $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$, $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$

für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad , \quad (i^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots)$$

$$\Rightarrow \quad e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x)^{4n+3}}{(4n+3)!}$$

$$e^{-ix} = \bigcirc - i \bigcirc - \bigcirc + i \bigcirc$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Satz. $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix}| = 1 \iff \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

Insbesondere

$$|\cos(x)| \leq 1,$$
$$|\sin(x)| \leq 1.$$

Beweis:

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\,\overline{e^{ix}} = e^{ix}\,e^{-ix} = e^0 = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

und

$$1 = |e^{ix}|^2 = \mathrm{Re}(e^{ix})^2 + \mathrm{Im}(e^{ix})^2 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$$

Beispiele. (Anwendung von $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ für trig. Formeln)

(1) Was ist $\cos(x+y)$ als Funktion von $\cos(x), \cos(y), \sin(x), \sin(y)$?

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

$$= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$$

$$= \cos(x)\cos(y) + i\sin(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x+y) = \mathrm{Re}\left(\text{——}\right)$$
$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \mathrm{Im}\left(\text{——}\right)$$
$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

(2) Was ist $\sin(x)^4$ als Funktion von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$?

$$\sin(x)^4 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}\Big((e^{ix})^4 - 4\, e^{3ix} e^{-ix} + 6\, e^{2ix} e^{-2ix} - 4\, e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix} \Big)$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$1 + 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6 \right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

(3) Was ist $\cos(5x)$ oder $\sin(5x)$ als Funktion von $\cos(x)^k, \sin(x)^k$?

$$(\cos(x) + i\sin(x))^k = \cos(kx) + i\sin(kx)$$

$\Rightarrow$

$$\cos(5x) + i\sin(5x) = (\cos(x) + i\sin(x))^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$
\begin{aligned}
= \cos(x)^5 &+ 5i\cos(x)^4\sin(x) \\
&- 10\cos(x)^3\sin(x)^2 \\
&- 10i\cos(x)^2\sin(x)^3 \\
&+ 5\cos(x)\sin(x)^4 \\
&+ i\sin(x)^5
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\cos(5x) &= \mathrm{Re}(\text{—}) \\
&= \cos(x)^5 - 10\cos(x)^3\sin(x)^2 \\
&\quad + 5\cos(x)\sin(x)^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(5x) &= \mathrm{Im}(\text{—}) \\
&= 5\cos(x)^4\sin(x) - 10\cos(x)^2\sin(x)^3 \\
&\quad + \sin(x)^5
\end{aligned}
$$

Hilfsatz – Es gibt eine Zahl $\pi \in [0,4]$

s. d.:

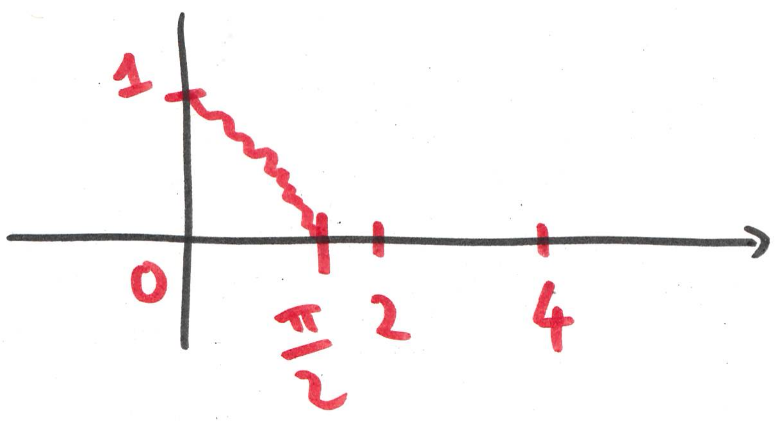
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Weiter gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Beweis: nächste Woche!

Satz. Für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos(x+\pi) = -\cos(x) & [\cos(2\pi) = 1] \\ \sin(x+\pi) = -\sin(x) & [\sin(2\pi) = 0] \\ \cos(x+2\pi) = \cos(x) & \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) & \\ \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) & [\text{insb. } \cos(\pi) = -1] \\ \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x) & [\sin(\pi) = 0] \end{cases}$$

Beweis:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin(x)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$
$$= -\sin(x)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \cos(x)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$
$$= \cos(x)$$

usw. . .

Bemerkung:

$$e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

ähnlicherweise:

$$e^{3i\pi/2} = -i$$

$$e^{2i\pi} = 1$$

Hilfsatz -

Für $\alpha \in \,]0, 2\pi[$ ist

$$e^{i\alpha} \neq 1.$$