2.4. Folgen

Def.: Eine Folge (von komplexe Zahlen) ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

bezeichnet $f = (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$

oder $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (gliedern der Folge)

$[\, f(1) = a_1,\ f(2) = a_2, \dots \,]$

oder $(a_1, a_2, \dots\dots)$

Manchmal: $(a_0, a_1, a_2, \dots\dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Bemerkungen

(1) $f_1 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleich $f_2 = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($f_1 = f_2$)

$\Updownarrow$

für $n\in\mathbb{N}$, $a_n = b_n$

(2) Eine Folge (a_n) ist nicht die Menge $\{a_n\}$

z.B. $f = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

$\{a_n\} = \{1, -1\}$

(3) Wir benutzen Folgen um reelle Zahlen zu approximieren: $(3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \ldots)$

Beispiele -

(1) [arithmetische Folgen]

$$(an+b)_{n\in\mathbb{N}_0} = (b,\ a+b,\ 2a+b,\ \dots)$$

(2) [geometrische Folgen)

$$(ba^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (b,\ ba,\ ba^2,\ \dots)$$

(3) [induktive / rekursive Folgen] Definition

a_1 gegeben ist

und die Regel $a_{n+1} = f(a_n)$

wo $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ auch gegeben ist

$$\left(a_1,\ f(a_1),\ f(f(a_1)),\ \dots\right)$$

$\boxed{\text{z.B.}\quad a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n^2 - 1}$

[z.B. (Fibonacci Zahlen) $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$]

<u>Def:</u> X Menge

$f_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}$

$f_2 : X \longrightarrow \mathbb{C}$

[z.B. $X = \mathbb{N}$]

(a_n)

(b_n)

① $f_1 + f_2 : X \longrightarrow \mathbb{C}$

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

② $f_1 f_2 : X \longrightarrow \mathbb{C}$

$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$

$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

③ falls $f_2(x) \neq 0$ <u>für alle $x \in X$</u>

ist $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

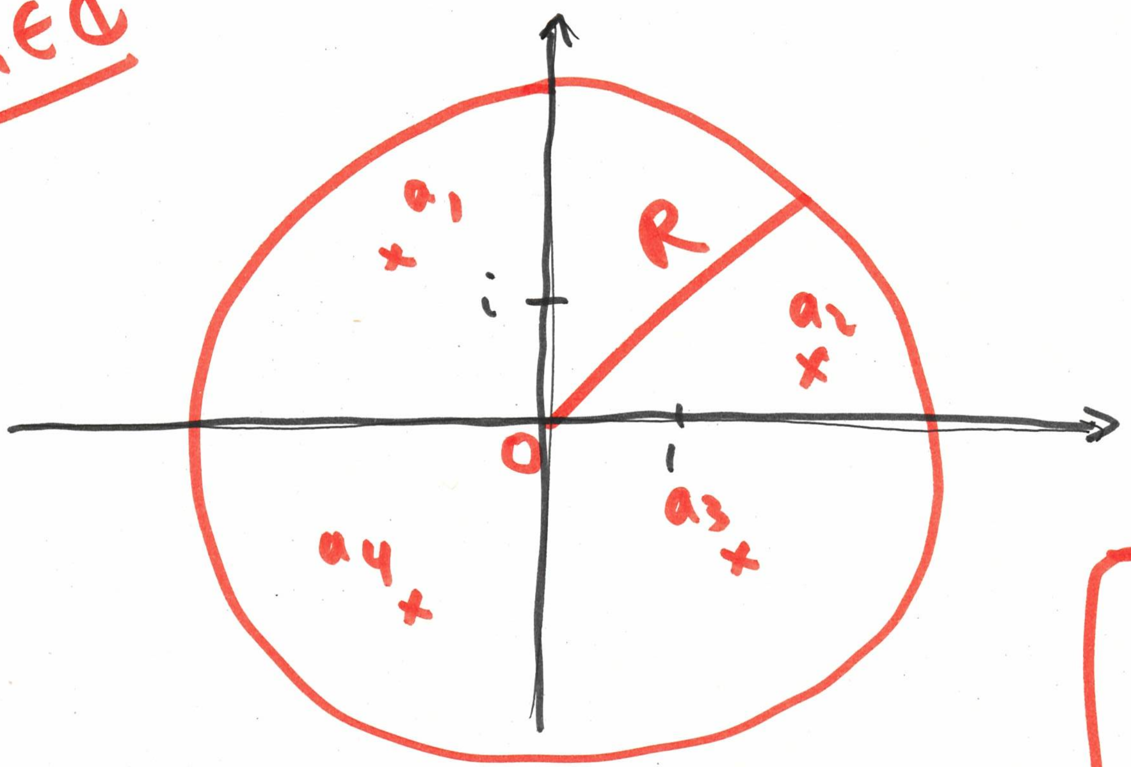
$\boxed{(a_n+b)_n = (a_n)_n + (b)_n}$

Def. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist <u>beschränkt</u>

wenn es gibt $R \in \mathbb{R}_+$ mit

für alle n, $|a_n| \leq R$.

$a_n \in \mathbb{C}$



$a_n \in \mathbb{R}$

$-R \leq a_n \leq R$

z.B. $(an+b)_n$ ist beschränkt $\Leftrightarrow a=0$

$(ba^n)_n$ ist beschränkt falls $|a| \leq 1$

90

2.5 Konvergenz

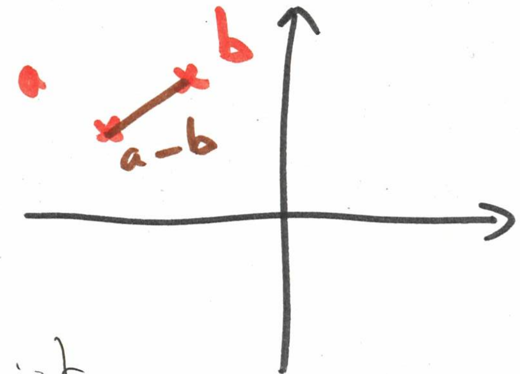
Motivation: eine $\underbrace{(a_n)}_{\text{Folge}}$ "konvergiert gegen a"

wenn die a_n "besser und besser Approximationen zu a" sind.

Def. $a, b \in \mathbb{C}$

Der Abstand zwischen a und b ist

$|a-b|$



a "gute Approximation" von b falls $|a-b|$ klein ist

a' "bessere Approx." falls $|a'-b| < |a-b|$

__Def.__ [Konvergenz]

(a_n) Folge

$a \in \mathbb{C}$

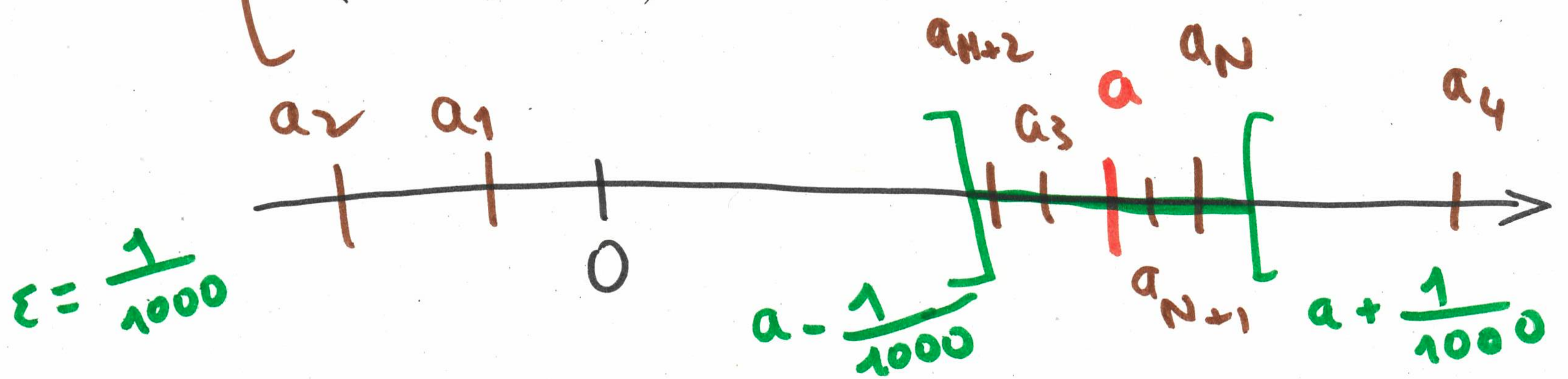
__Notation:__

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $(a_n \longrightarrow a)$

(a_n) __konvergiert gegen a__ bedeutet:

$\boxed{\text{für } \text{jede } \varepsilon > 0 \text{ [epsilon], es gibt } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.}$

$[\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ |a_n - a| < \varepsilon]$



$a_n \in \mathbb{R}$

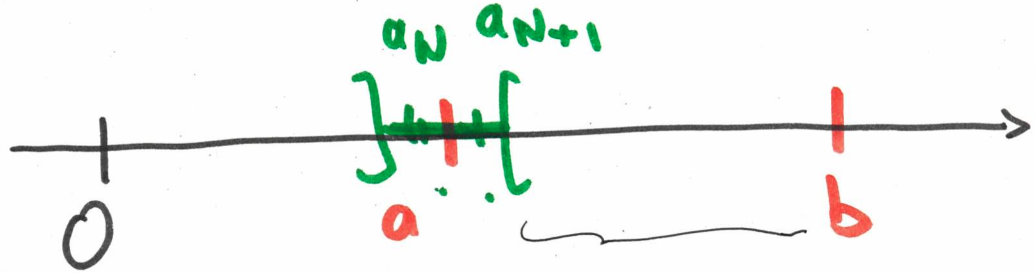
$a \in \mathbb{R}$

Bemerkungen:

① eine Folge (a_n) muss nicht konvergieren!

[z.B.: $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, ..)$ konvergiert nicht]

② falls (a_n) konvergiert, ist der Grenzwert a eindeutig



(wenn a_n zu nah zur a ist, kann a_n nicht b approximieren)

(3) Falls (a_n), (b_n) folgen sind, und es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = b_n$ für $n \geq N$, dann konviergert (a_n) $\Leftrightarrow$ (b_n) konvegiert

[und dann ist $\lim a_n = \lim b_n$]

("konvergenz ist eine asymptotische Eigenschaft")

(4) $(a_n \longrightarrow a) \Leftrightarrow (|a_n - a| \longrightarrow 0)$

[Warum? sei $b_n = |a_n - a| \in \mathbb{R}_+$

$|b_n - 0| = |b_n| = b_n$]

[(5) Falls $a_n \to 0$ und (b_n) beschränkt ist, dann folgt $a_n b_n \longrightarrow 0$.

~~[Warum? sei ...]~~

[Warum? sei $R > 0$ mit $|b_n| \leq R$
dann für $\varepsilon > 0$ ist $|a_n b_n| < \varepsilon$
für alle n sodass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{R}$,
dass heisst für alle $n \geq N$, wo N
ist gewählt sodass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{R}$ für $n \geq N$]

<u>Hilfsatz</u>. 1 (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) ist beschränkt.

2 Wenn $|a_n - a| \leq b_n$ und (b_n) ~~konge~~ konvergiert gegen 0, dann ist

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Satz.- [2.5.9]

(a_n), (b_n) Folgen

Hyp. $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$

1. $(a_n + b_n)_n \longrightarrow a+b$
2. $(a_n b_n)_n \longrightarrow ab$
3. Falls $b \neq 0$, ist $b_n \neq 0$ für $n \geq M$, und die Folge

$$c_n = \begin{cases} 0, & n < M \\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n \geq M \end{cases}$$

konvergiert gegen $\dfrac{a}{b}$.

Beweis.

(1) Zurück zur Definition:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |\underbrace{(a_n+b_n)-(a+b)}_{=(a_n-a)+(b_n-b)}| < \varepsilon \text{ ?}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Seit

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| \underbrace{\leq}_{\text{Dreieckrungleichung}} |a_n-a| + |b_n-b|$$

Es gibt $N_1 \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_1$

" " $N_2 \in \mathbb{N}$ " " $|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_2$

Sei $N = \max(N_1, N_2)$; für $n \geq N$ gilt

$n \geq N_1$ und $n \geq N_2$

$\Rightarrow$ $|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ $|(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon$.

(2) [Ziel: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$]

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)\, b_n - ab + a b_n$$

$$= \underbrace{(a_n - a)}_{\to 0}\, b_n + a\,\underbrace{(b_n - b)}_{\to 0}$$

$$|a_n b_n - ab| \leq |(a_n - a) b_n| + |a(b_n - b)|$$

(Dreiecksungl.)

$$= \underbrace{\underbrace{|b_n|}_{\text{beschränkt}}\ \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0}}_{\substack{\to 0 \\ (\text{s. } 94)}} + \underbrace{\underbrace{|a|}_{\text{bes.}}\ \underbrace{|b_n - b|}_{\to 0}}_{\to 0}$$

$$\to 0 \quad (1)$$

Hilfsatz (2)

$\Rightarrow \lim a_n b_n = ab$

Satz (2.5.10) (a_n) Folge, $a_n = x_n + i y_n$

(1) $a = x + iy$

$$(a_n \longrightarrow a) \iff (x_n \longrightarrow x \text{ und } y_n \longrightarrow y)$$

(2) Falls $a_n \to a$ folgt

$$\overline{a_n} \longrightarrow \overline{a}$$

$$|a_n| \longrightarrow |a|$$

2.6. Beispiele von Konvergenz

Satz. [2.6.1]

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{für } k > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{für } |a| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{b^n} = 0 \quad \text{für } \begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ |b| > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

[z.B. $\frac{1}{n} \to 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, $\frac{n^3}{2^n} \to 0$, $\frac{2^n}{n!} \to 0$]

100