1. $\left|\frac{1}{n^k}\right| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon$ ist äquivalent mit

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/k} = N$$

2. ist Sonderfall von 3 mit $k=0$, $b = \frac{1}{a}$

3. später (monotone Folgen)

4. $$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{\overbrace{|a| \cdot \ldots \cdot |a|}^{n}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

Sei $N > 2|a|$; für $n \geq N$ ist

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \underbrace{\left(\frac{|a|^N}{N!}\right)}_{\text{feste Zahl}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \underbrace{\frac{(2|a|)^N}{N!}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{(3)\ \to 0}$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$$

101

Beispiel. (2.6.2)

$1 \leq k \leq \ell \quad (\text{in } \mathbb{N})$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_\ell n^\ell + \cdots\cdots + b_1 n + b_0} = \,?$$

[wo $a_i \in \mathbb{C}$, $b_j \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, $b_\ell \neq 0$]

$$= \frac{a_k n^k}{b_\ell n^\ell} \boxed{\frac{\left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \cdots + \frac{a_0}{a_k} \underbrace{\frac{1}{n^k}}_{\to 0}\right)}{\left(1 + \cdots\cdots + \frac{b_0}{b_\ell} \underbrace{\frac{1}{n^\ell}}_{\to 0}\right)}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \text{ [dividierung]}$$

$$= \underbrace{\frac{a_k}{b_\ell} \frac{1}{n^{\ell-k}}} \times \left(\text{konv. gegen } 1 \right)$$

<u>Fall 1</u>: $k = \ell$, dann $\longrightarrow \frac{a_k}{b_\ell}$

<u>Fall 2</u>: $\ell > k$, dann $\longrightarrow 0$

Es folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0}{b_\ell n^\ell + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_\ell} & \text{falls } k = \ell \\ 0 & \text{falls } \ell > k \end{cases}$$

<u>Falls</u> <u>$k > \ell$</u> : wir werden sehen dass den Grenzwert existiert nicht

2.7 – Dezimalentwicklung

Ziel: jede $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert einer Folge mit der Form

$$a_n = (\text{nat. Zahl}) + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots + \frac{d_n}{10^n}$$

darstellen, wo $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

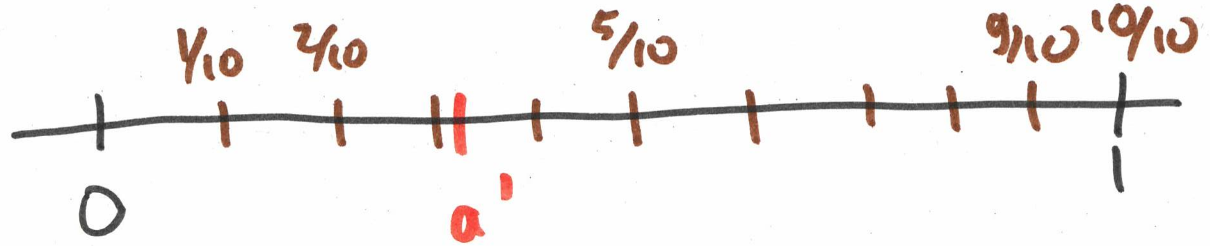
[wie $\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \dots$
$= 1{,}41\dots$]

- Wir nehmen an, $a \geq 0$
- Es gibt eine eindeutige Zahl $\lfloor a \rfloor \in \mathbb{N}_0$

sodass $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$

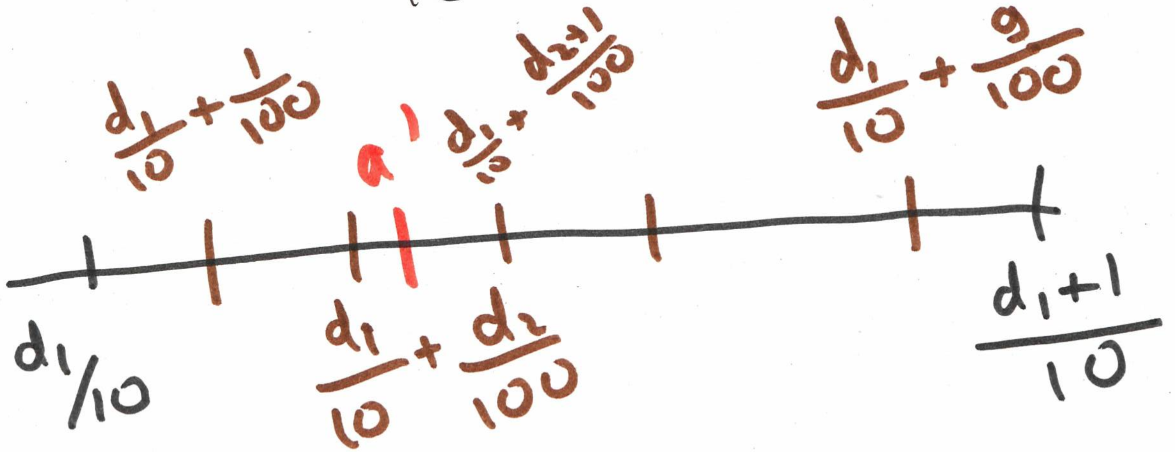
(z.B. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$)

Sei $a' = a - \lfloor a \rfloor$, $a' \in [0, 1[$



Es gibt genau ein $d_1 \in \{0, \dots, 9\}$ sodass

$$\frac{d_1}{10} \leq a' < \frac{d_1 + 1}{10} \quad ; \quad \text{sei} \quad a_1 = \frac{d_1}{10}$$



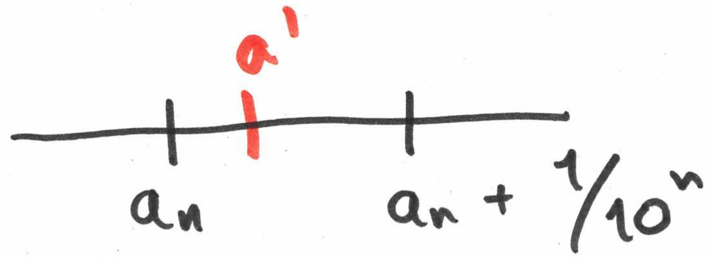
Es gibt genau ein $d_2 \in \{0, \dots, 9\}$ so dass

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} \leq a' < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2 + 1}{100}$$

Wiederholung .... für jede n, wir finden $d_1, \dots, d_n$ in $\{0, \dots, 9\}$ sodass

$$\underbrace{\frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n}}_{a_n} \leq a' < \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n + 1}{10^n}$$

$$a_n \leq a' < a_n + \frac{1}{10^n}$$



d.h. $$|a_n - a'| \leq \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

sodass $$a' = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$a = \lfloor a \rfloor + \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\lfloor a \rfloor + a_n).$$

2.8. ~~[illegible]~~ Konvergenz überprüfen

Def. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reelle Zahlen ist

(1) wachsend falls $a_{n+1} \geq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$

(2) fallend falls $a_{n+1} \leq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$

(Monoton bedeutet entweder (1) oder (2))

[z.B. $(2n)_n$ wachsend
$(1/n)_n$ fallend
$((-1)^n)_n$ nicht monoton]

Satz. (2.8.3)

Eine monotone Folge (a_n) von reellen Zahlen konvergiert genau dann wenn sie ist beschränkt.

Falls (a_n) ist wachsend gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und falls (a_n) ist fallend gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

__Beweis__ (für (a_n) wachsend):

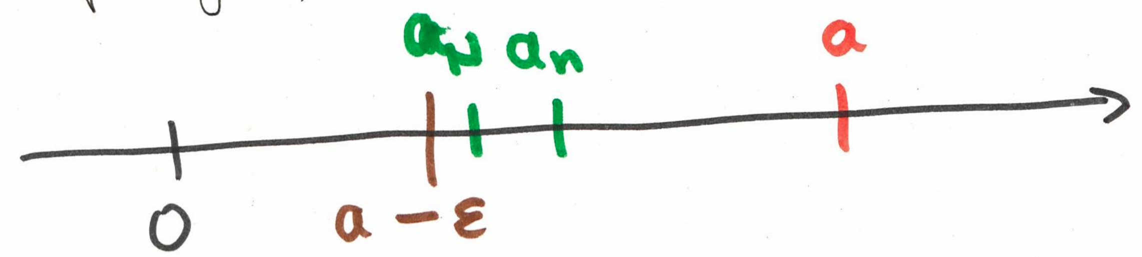
Falls (a_n) konv. ist sie beschränkt ✓

Wir nehmen an, (a_n) ist beschränkt.

Insbesondere ist die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ nicht leer und von oben beschränkt

$\Longrightarrow$ A hat ein Supremum $a \in \mathbb{R}$.

Wir überprüfen, dass $a_n \longrightarrow a$.



Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon < a$, so ist $a - \varepsilon$ keine obere Grenze von A; es gibt $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$a - \varepsilon < a_N \leq a \qquad a = \sup(A)$$

Für $n \geq N$ ist

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a \quad \text{(die Folge ist wachsend)}$$

insbesondere ist $|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Beispiel.

(1) $$a_n = \frac{n^k}{b^n}, \quad \begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ |b| > 1 \end{cases} \quad (b \in \mathbb{C})$$

$|a_n| = \dfrac{n^k}{|b|^n}$; es ist genug

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{|b|^n} = 0.$$

Sei $b_n = \dfrac{n^k}{|b|^n}$; $b_n \in \mathbb{R}_+$, $b_n \neq 0$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{|b|} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k$$

$$\frac{n+1}{n} \longrightarrow 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \longrightarrow 1^k = 1$$

$$\frac{1}{|b|} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{|b|} < 1$$

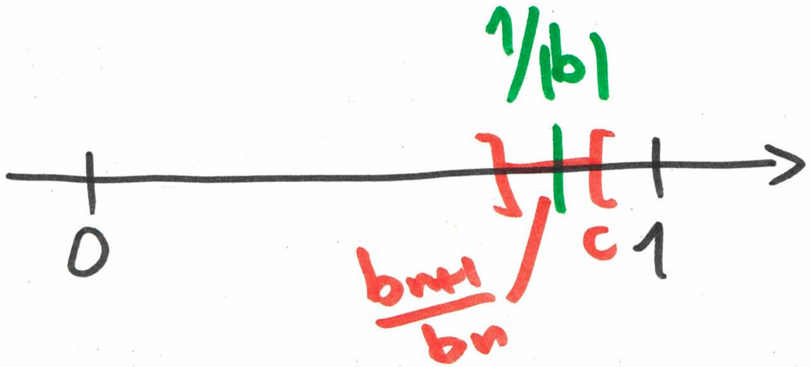
Es folgt dass es gibt $M \in \mathbb{N}$ ~~sodass~~ und

$0 < c < 1$ sodass

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq c \quad \text{für} \quad n \geq M$$

$$\Rightarrow \quad b_{n+1} \leq b_n c \leq b_n$$

für $n \geq M$



Satz $\Longrightarrow$ der Grenzwert $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert.

Wie beweist man dass $b = 0$?

$$b_{n+1} \le c\, b_n \quad \text{für } n \ge M \quad [\text{mit } c < 1]$$

Satz

$$b = \overbrace{\inf \{ b_n \mid n \ge M \}}^{\inf(B)}$$

$$\Longrightarrow \quad b \le b_{n+1} \le c\, b_n \quad \text{für } n \ge M$$

$$\Longrightarrow \quad c^{-1} b \le b_n \quad \text{für } n \ge M$$

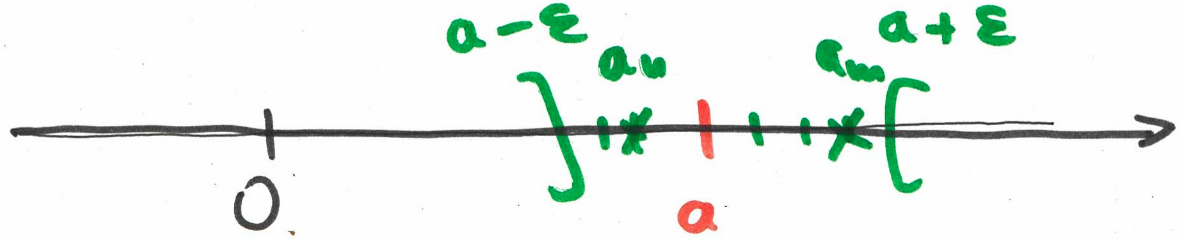
$$\Longrightarrow \quad c^{-1} b \le b \quad [\text{weil } c^{-1} b \text{ untere Grenze von } B \text{ ist}]$$

$$\Longrightarrow \quad b = 0 \quad (\underline{\underline{\text{weil } c < 1}})$$

Es gibt ein Kriterium das für <u>alle</u> Folgen passt um Konvergenz zu überprüfen: das <u>Cauchy Kriterium</u>.

<u>Motivation</u>: sei (a_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$.

d.h. $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$

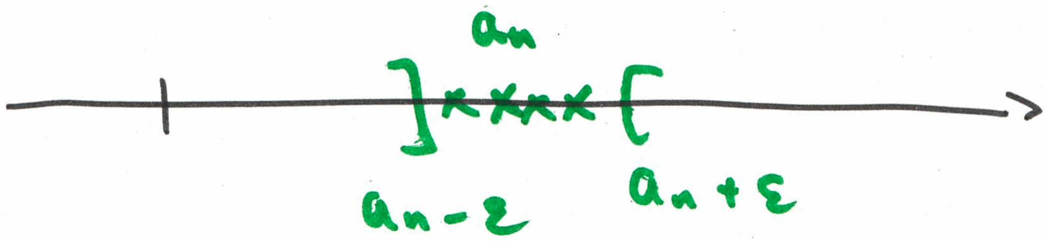


$|a_n - a_m| < 2\varepsilon$ für $n, m \geq N$

__Def__ [Cauchy-Folge]

Eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge sodass:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$



__Satz__ (2.8.7) Jede Cauchy-Folge konvergiert.