Beweis:

Hilfsatz: $g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, Regelfunktion

(1) $$\left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|\, dt$$

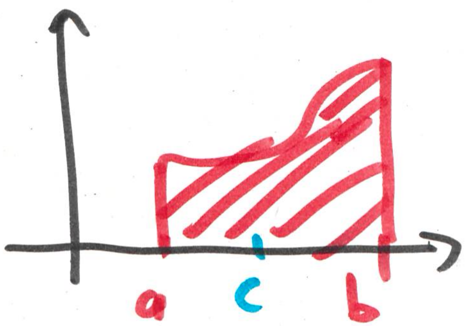
[Dreiecksungl.]

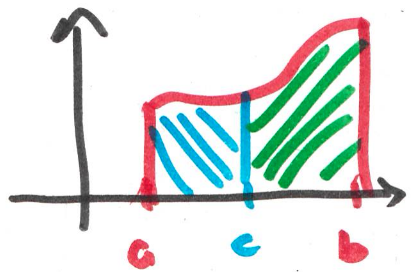
$$\leq M\,(b-a)$$

[falls $|g(t)| \leq M$, $t \in [a,b]$]

(2) $a \leq c \leq b \Rightarrow g$ auf $[a,c]$, $[c,b]$ Regelf. und

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^c g(t)\, dt + \int_c^b g(t)\, dt$$

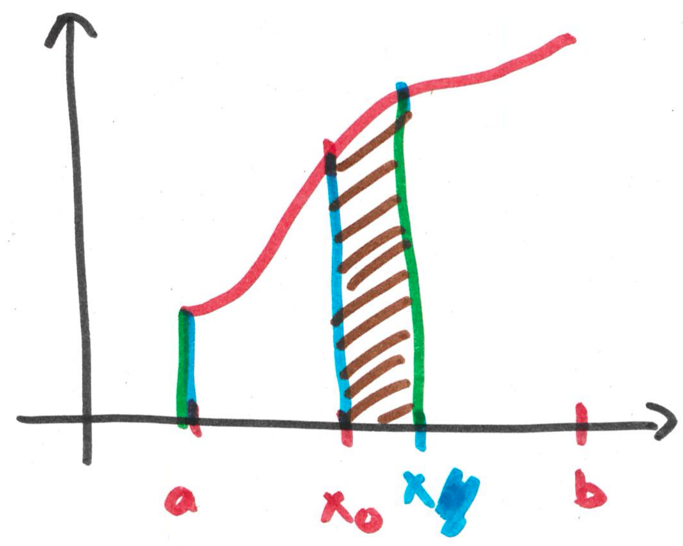




388

$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, g stetig

$x_0 \in [a,b]$, $a \leq x_0 < x \leq b$



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x g(t)\,dt - \int_a^{x_0} g(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x g(t)\,dt$$

Sei $\varepsilon > 0$: Stetigkeit von g an x_0

$\Rightarrow$ es gibt $\delta > 0$ sodass $|g(t) - g(x_0)| < \varepsilon$

für $x_0 \leq t \leq x_0 + \delta$

389

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \left(g(x_0) + g(t) - g(x_0)\right) dt$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} g(x_0)\,dt + \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \left(g(t)-g(x_0)\right) dt$$

$$= g(x_0) + R$$

wo $$|R| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \left(g(t)-g(x_0)\right) dt\right|$$

$$|R| \le \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dt, \quad \text{falls } x_0 \le x \le x_0+\delta$$

d.h. $|R| \le \varepsilon$ für $x_0 < x \le x_0+\delta$.

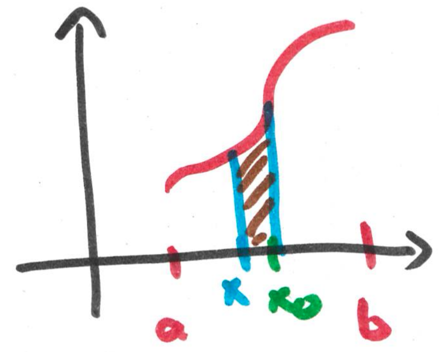
<u>d.h.</u> $f'_r(x_0) = g(x_0)$

390

Ähnlicherweise: $f_e'(x_0) = g(x_0)$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$



<u>Kor.</u> Für $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(t)\,dt$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

differenz

$\frac{g(1)}{n} \to 0$

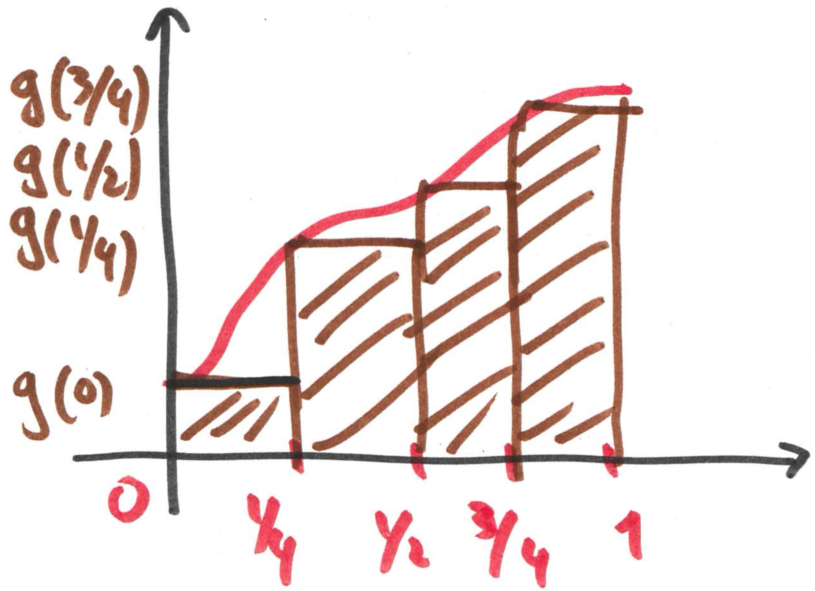
[<u>Warum</u> :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 s_n(t)\,dt$$

wo

$$s_n(t) = g\left(\frac{k}{n}\right) \text{ für } \frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n},$$

wo $0 \le k \le n-1$



$n = 4$

Mit gleichmässig Stetigkeit sieht man dass

$s_n(t) \longrightarrow g(t)$ <u>gleichmässig</u>

$$\Rightarrow \int_0^1 s_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 g(t)\,dt$$

z. B

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(0+\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^4\right) = ?$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{wo } g(t)=t^4$$

$\longrightarrow$ der Grenzwert existiert und

ist $= \int_0^1 t^4\,dt$

$= f(1) - f(0)$

wo $f' = g$; z. B. $f(t) = \frac{1}{5}t^5$

$\longrightarrow$ $\boxed{\lim. = \frac{1}{5}}$

Weitere Anwendung:

g Regelfunktion

Satz: $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a < b$

Falls $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ gleichmässig auf $[a,b]$, wo g_n Regelfunktionen sind,

dann gilt

$$\int_a^b g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt.$$

[z.B. g, g_n stetig]

<u>Beweis:</u>

$$\left| \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b g_n(t)\,dt \right|$$

Linearität $\longrightarrow$ $$= \left| \int_a^b (g(t) - g_n(t))\,dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |g(t) - g_n(t)|\,dt$$

$$\leq (b-a)\,\varepsilon$$

wenn n is gross genug sodass

für <u>alle</u> $t \in [a,b]$, $|g(t) - g_n(t)| < \varepsilon$.

z. B.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$, sodass die Potenzreihe $\sum a_n x^n$ hat $R > 0$ Konvergenzradius.

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{n=0}^{\cancel{+\infty}} a_n x^n = g(x)$$

ist auf $]-R, R[$ stetig.

Für $|x| < R$, die Summen

$$a_0 + a_1 \cancel{t} + \dots + a_n \cancel{t}^n$$

konvergiert gleichmässig gegen g, auf $[0, x]$.

$$\Rightarrow \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\Big)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^x (a_0 + \dots + a_n t^n)\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Insbesondere:

$$|x|<1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$1 + y + y^2 + \dots = \frac{1}{1-y}, \quad y = -x^2$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

hat Konvergenzradius 1.

$\rightsquigarrow$ für $|x| < 1$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

[weil $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\arctan(0) = 0$]

Wir bemerken

$$\arctan\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{3}}}_{<1}\Big) = \frac{\pi}{6} \qquad \left(\text{weil } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} .$$

Man sieht dass $\left| \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \right| < 2 \cdot 10^{-6}$

6.3. Weitere Eigenschaften von Integralen

Def. $\underline{a > b}$, g Regelfunktion

$$\begin{cases} \int_a^b g(t)\,dt = -\int_b^a g(t)\,dt \\ \int_a^a g(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)$$

für $\boxed{\text{alle } a, b, c}$, wenn g ist auf die 3 Intervalle eine Regelfunktion.

Berechnungsregeln:

[Linearität] $(u, v \in \mathbb{R})$ $\displaystyle\int_a^b (u g_1(t) + v g_2(t))\, dt = u \int_a^b g_1(t)\, dt + v \int_a^b g_2(t)\, dt$

[partielle Integration] g_1, g_2 auf $[a,b]$ differenzierbar, C^1

$$\Rightarrow \quad \int_a^b g_1'(t)\, g_2(t)\, dt = g_1(b) g_2(b) - g_1(a) g_2(a) - \int_a^b g_1(t)\, g_2'(t)\, dt$$

[Substitutionsregel] g stetig, $h \in C^1$

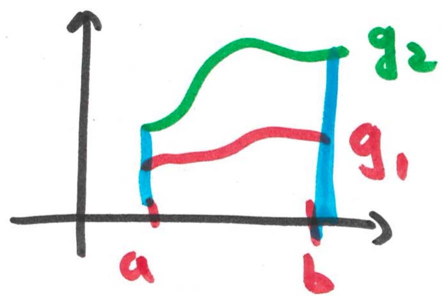
$$\Rightarrow \quad \int_a^b h'(t)\, g(h(t))\, dt = \int_{h(a)}^{h(b)} g(t)\, dt$$

Satz (6.3.2)

$I = [a,b]$, $a < b$

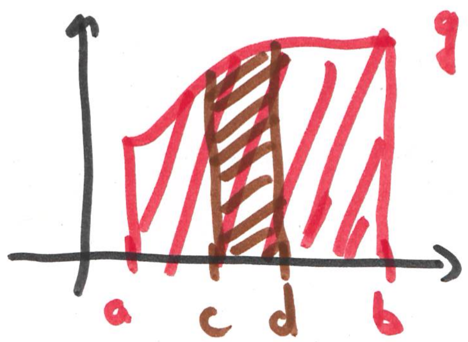
(1) g_1, g_2 stetig, $g_1(t) \leq g_2(t)$ für $t \in [a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b g_1(t)\,dt \leq \int_a^b g_2(t)\,dt$$



(2) g stetig, $\boxed{g \geq 0}$, $a \leq c \leq d \leq b$

$$\Rightarrow \int_c^d g(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$



(3) g stetig, $\boxed{g \geq 0} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \int_a^b g(t)\,dt \geq 0$

und $\left(\int_a^b g(t)\,dt = 0 \Longrightarrow g(t) = 0 \text{ für alle } t \in [a,b] \right)$

402

Weil Integrale mit Stammfunktionen (manchmal) "berenchenbar" sind, kann man Integrale benutzen um endliche Summen zu studieren!

Beispiel: wie gross ist $n!$ für n "grosse Zahl"?

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

$$\log(n!) = 0 + \log(2) + \ldots + \log(n)$$

Wir versuchen diese Summe mit $\int_1^n \log(t)\,dt$ zu vergleichen

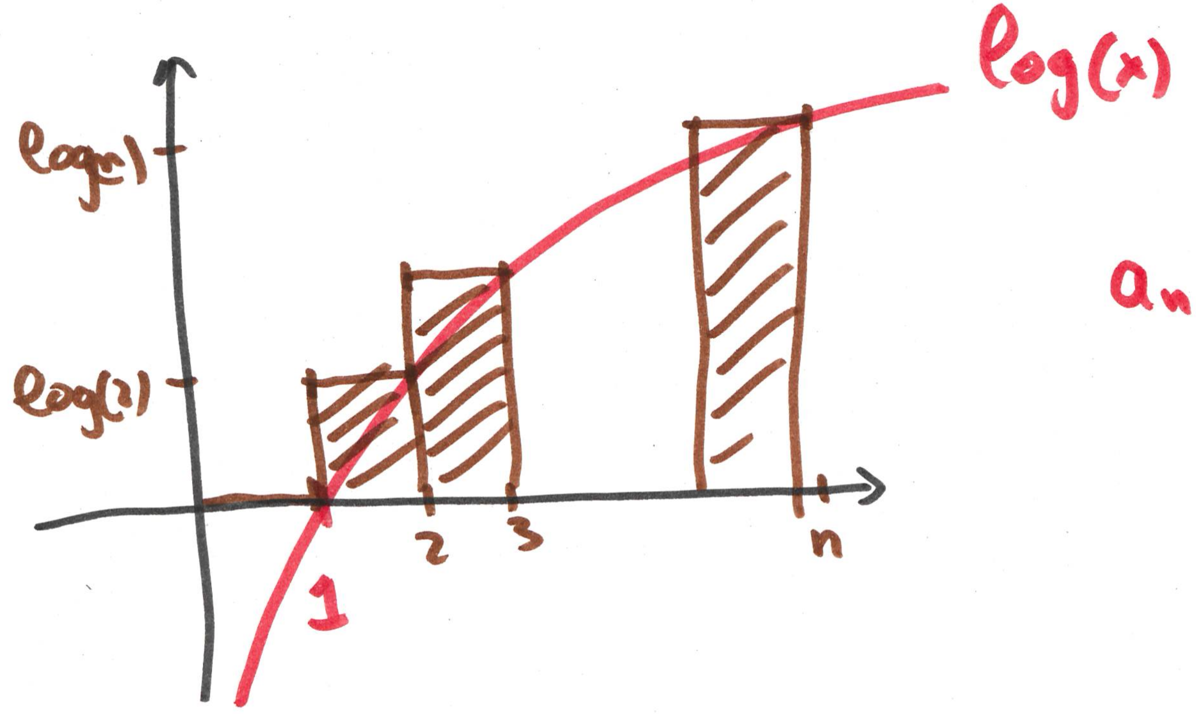
Wir wissen: (part. Integration)

$$\int_1^x \log(t)\,dt = x\log(x) - (x-1)$$

$$a_n = \log(1) + \log(2) + \dots + \log(n)$$

$$a_n \le \int_1^{n+1} \log(t)\,dt$$

a_n = ▨ Flächeninhalt



$$a_n \geq \int_1^n \log(t)\,dt$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log(n)-(n-1)} = 1}$$