Man sieht dass diese Methode funktioniert für

$$a_n = g(1) + \cdots + g(n)$$

falls $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{monoton wachsend} \\ \text{oder} \\ \text{〃 fallend} \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

Was die Ungleichungen für a_n sind, sieht man am besten mit ein Graph

Satz [6.3.4]

$k \in \mathbb{N}_0$, $\quad I \subset \mathbb{R}$ Interval

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{l} (k+1)\text{-mal differenzierbar} \\ f^{(k+1)} \text{ stetig} \end{array}\right.$ auf I

$x_0 \in I$

Für $x \in I$ gilt

$$f(x) = T_k f(x; x_0) + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k \, dt$$

$$\left[\text{Lagrange: } f(x) = T_k f(x; x_0) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right]$$

wo $c \in [x, x_0]$

Erinnerung:

$$T_k f(x; x_0) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Warum?

$\underline{k=0}$:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{= T_0} + \int_{x_0}^{x} f'(t) \cdot \underbrace{1}_{=(x-t)^0} \, dt$$

$$= \checkmark$$

$\underline{k=1}$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt}_{\int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt}$$

$$(x-t)^0 = g_1'(t), \quad f'(t) = g_2(t), \quad g_1(t) = -(x-t)$$

$$= f(x_0) + \Big(0 - \big(-(x-x_0)\big) f'(x_0)\Big) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt$$

$$T_1 f(x; x_0) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt$$

40g

$k=2$: $$f(x) = T_1 f(x;x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)}_{= g_1'(t)} \underbrace{f''(t)}_{= g_2(t)}\, dt$$

wo $g_1(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2$

$$\rightsquigarrow \quad f(x) = T_1 f(x;x_0) + \left(0 - \left(-\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0)\right) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \right)$$

$$= T_2 f(x;x_0) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt$$

Und ~~dann~~ dann Induktion ...

Beispiel:

$$f(x) = \log(1+x), \quad \text{auf }]-1, +\infty[$$

$$x_0 = 0$$

Es gilt $$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad k \geq 1$$

Taylor Formel:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$+ \frac{(-1)^k}{\cancel{k!}} \int_0^x \frac{\cancel{k!}}{(1+t)^{k+1}} (x-t)^k \, dt$$

$\underline{x=1}$:

$$\left|\log(2) - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k}\right)\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{(1+t)^{k+1}}\,dt\right|$$

$|(1-t)^k| \le 1$ für $0 \le t \le 1$

$$\le \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{k+1}}\,dt$$

$$= \frac{1}{k}$$

(weil $-\frac{1}{k}\frac{1}{(1+t)^k}$ ist Stammfunktion)

$$\rightsquigarrow \quad \log(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

6.4 – Methoden / Standard Beispiele für Integrale

① Eine wichtige Substitution:

$a \neq 0$

$$\int_{x_0}^{x} g(at+b)\,dt = \frac{1}{a}\int_{ax_0+b}^{ax+b} g(u)\,du$$

$$[\, u = at+b, \quad du = a\,dt \,]$$

z.B.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+(2t+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{(1+u^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan(3) - \arctan(1)\right)$$

(2)

Einfache Stammfunktionen

$$\int t^a \, dt = \frac{1}{a+1} t^{a+1}, \quad a \neq -1$$

rechte Seite = **eine** Stammfunktion

$$\int \frac{1}{t} \, dt = \log(t)$$

$$\int e^t \, dt = e^t$$

$$\int \cos(t) \, dt = \sin(t)$$

$$\int \sin(t) \, dt = -\cos(t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \arcsin(t), \quad -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \arccos(t)$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(t)$$

$$\int \tan(t)\, dt = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\, dt = - \int \frac{(\cos'(t))}{\cos(t)}\, dt$$

$u = \cos(t)$

$$= - \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= - \log(\cos(t))$$

$$\int \log(t)\, dt = t \log t - (t-1)$$

3 Substitutionsregel / Partielle Integration

4

$$\int_a^b t^k e^t \, dt \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\int_a^b t^k \cos(t)\, dt \, , \quad \int_a^b t^k \sin(t)\, dt$$

(oder $\cos(ct)$, $\sin(ct)$, e^{ct})

$\leadsto$ partielle Integration ~~mit~~ wo man t^k ableitet, und wiederholung bis $\int e^t \, dt$ oder $\int \cos(t)\, dt$ oder $\int \sin(t)\, dt$

$\leadsto$ Resultat:

$\underbrace{(\text{Polynom})}_{\text{vom Grad } k} \times e^t$ [oder $\cos(t)$ oder $\sin(t)$]

415

z.B

$$\int_0^x t\cos(t)\,dt$$
$$= \Big[t\sin(t)\Big]_0^x - \int_0^x 1\cdot\sin(t)\,dt$$
$$= x\sin(x) + \Big[\cos(t)\Big]_0^x$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) - 1$$

5 **Produkt trig. × exponential**

$r, s \in \mathbb{R}$

$r \neq 0, s \neq 0$

$$\int_a^b \cos(rt)\, e^{st}\, dt, \qquad \int_a^b \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(rt)\, e^{st}\, dt$$

Idee: zweimal partielle Integration (man ableitet die trig. Funktion)

$\longrightarrow$ eine Gleichung für das Integral lösen z.B. $I = \int_0^x \cos(t) e^t \, dt$

$$= \left[\cos(t) e^t \right]_0^x + \int_0^x \sin(t) e^t \, dt$$

$$= \cos(x) e^x - 1 + \left[\sin(t) e^t \right]_0^x - \underbrace{\int_0^x \cos(t) e^t \, dt}_{I}$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \cos(x) e^x - 1 + \sin(x) e^x$$

$$I = \frac{1}{2}\left(e^x \left(\cos(x) + \sin(x)\right) - 1\right)$$

6 Trig. Funktion × Trig. Funktion

$r \neq 0$
$s \neq 0$

$$\int_a^b \cos(rt)\,\sin(st)\,dt, \quad \int_a^b \cos(rt)\cos(st)\,dt$$

$$\int_a^b \sin(rt)\,\sin(st)\,dt$$

zweimal part. Integration ⟶ Gleichung lösen

7 Potenzen von trig. Funktionen

$$\int_a^b \cos(rt)^k\,dt, \quad \int_a^b \sin(rt)^k\,dt$$

$(k \in \mathbb{N}_0$
$r \in \mathbb{R})$

$\longrightarrow$ $\cos(\nu t)^k$ = lineare Kombination von

$\cos(j\nu t)$, $\sin(j\nu t)$, $0 \le j \le k$

$\leadsto$ die Linearität benutzen und

$\int_a^b \cos(j\nu t)\,dt$, $\int_a^b \sin(j\nu t)\,dt$

z.B.

$$\int_0^x \sin(t)^3\,dt$$

$$\sin(t)^3 = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3t) - 3\sin(t)\right)$$

$$\rightsquigarrow \int_0^x \sin(t)^3\, dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^x \sin(3t)\, dt$$

$$+ \frac{3}{4}\int_0^x \sin(t)\, dt$$

$$= +\frac{1}{4\cdot 3}\Big[\cos(3t)\Big]_0^x$$

$$- \frac{3}{4}\Big[\cos(t)\Big]_0^x$$

$$= \frac{\cos(3x)}{12} - \frac{1}{12} - \frac{3\cos(x)}{4} + \frac{3}{4}$$

8 **Sonderfall:** "Orthogonalität"

n, m in $\mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt = 0 \quad \text{falls } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)^2\,dt = \pi \quad \text{falls } n \neq 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt = 0 \quad \text{falls } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)^2\,dt = \pi \quad \text{falls } n \neq 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)\,dt = 0$$

$\longrightarrow$ **Fourier Reihen**

9 Rationale Funktionen

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q Polynome, und $q(x) \neq 0$ für $x \in I$

$\int_a^b \frac{p(t)}{q(t)}\,dt = ?$

Man kann es berechnen; $\left\{\begin{array}{l}\text{die Stammfunktion}\\ \text{das Resultat}\end{array}\right.$ ist immer eine Kombination von:

- Polynome
- Rationale Funktionen
- log (rationale Funktionen)
- arctan (———)

$(\log)' = \frac{1}{x}$

$(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$

Schritt 1: "Partialbruchzerlegung"

$\rightsquigarrow$ $g(x) =$ lineare Kombination von

- Polynome (1)
- $\dfrac{1}{(\alpha x+\beta)^k}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ (2)
- $\dfrac{x}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$, $\dfrac{1}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$ (3)

$(\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0)$

Schritt 2: man soll nur Stammfunktionen von (1), (2), (3) finden.

(1) klar

2

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(\alpha t+\beta)^k}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha x_0+\beta}^{\alpha x+\beta} \frac{1}{u^k}\,du$$

und $$\int \frac{1}{u^k}\,du = \begin{cases} \frac{1}{1-k}u^{1-k}, & k\neq 1 \\ \log(u), & k=1 \end{cases}$$

3

$$\int \frac{t}{(\alpha t^2+\beta t+\gamma)^k}\,dt, \quad \int \frac{dt}{(\alpha t^2+\beta t+\gamma)^k}$$

$$\alpha t^2+\beta t+\gamma = \alpha\left(\left(t+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$

$\longrightarrow$ Substitutionen

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\,dt \quad \text{oder} \quad \int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

Fall 1:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{t}{(t^2+1)^k}\,dt = \frac{1}{2}\int_{x_0^2+1}^{x^2+1} \frac{du}{u^k}$$

$u = t^2+1$

$du = 2t\,dt$

Fall 2:

$$I_k = \int_a^b \frac{dt}{(t^2+1)^k} = ? \qquad k \in \mathbb{N}$$

Idee: $I_1 = \arctan(b) - \arctan(a)$

Wir finden mit partielle Integration eine rekursive Gleichung zwischen I_k und I_{k+1}:

$$\int_a^b \frac{1 \cdot dt}{(t^2+1)^k} = \left[\frac{t}{(t^2+1)^k}\right]_a^b + 2k\int_a^b \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt$$