Idee (warum π existiert)

$\cos(0) = 1 \qquad \left[\frac{e^{i0} + e^{-i0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \right]$

cos ist stetig auf $\mathbb{R}$

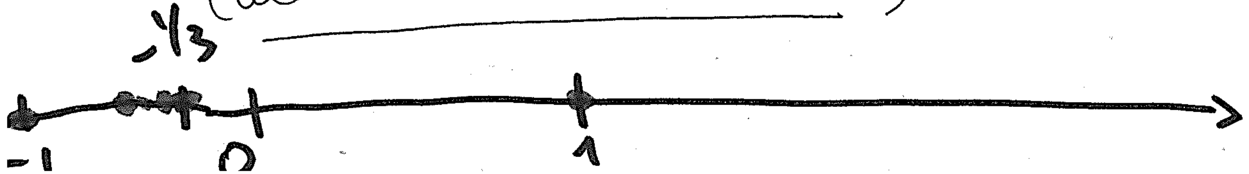
~~es~~ ist genug zu überprüfen $\cos(2) < 0$

($\Rightarrow$ es gibt $x_0 \in]0,2[$ mit $\cos(x_0) = 0$, und man $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste Nullstelle definieren)

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$\Rightarrow$ (alternierende Reihe) $\cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3}$

< 0



Weil $\frac{\pi}{2}$ die kleinste Nullstelle ist, folgt auch $\cos(x) > 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Für <u>sinus</u> auf $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin(0) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

oder $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

aber mit der Potenzreihe / alternierende Reihen sieht man: $\boxed{\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}}$ für $0 \leq x \leq 4$

insb. $\sin(x) > 0$ für $0 < x^2 < 6$

sicher für $0 < x \leq 2$

Warum ist $e^{i\alpha} \neq 1$ für $0 < \alpha < 2\pi$?

Falls nicht, es gibt eine <u>kleinste Zahl</u>

$$0 < \alpha < 2\pi$$

mit $e^{i\alpha} = 1$.

$$\left(e^{i\alpha/4}\right)^4 = e^{i\alpha} = 1$$

$$\rightsquigarrow \quad e^{i\alpha/4} \in \{1, -1, i, -i\}$$

$\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha/4}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 0$, unmöglich weil $\alpha/4 < \frac{\pi}{2}$

nicht möglich! ($\alpha/4 < \alpha$)

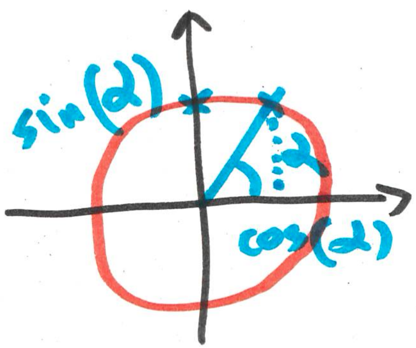
unmöglich! ($e^{i\alpha/2} = 1$, $\alpha/2 < \alpha$)

Satz. (1) Jede $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$a^2 + b^2 = 1$$

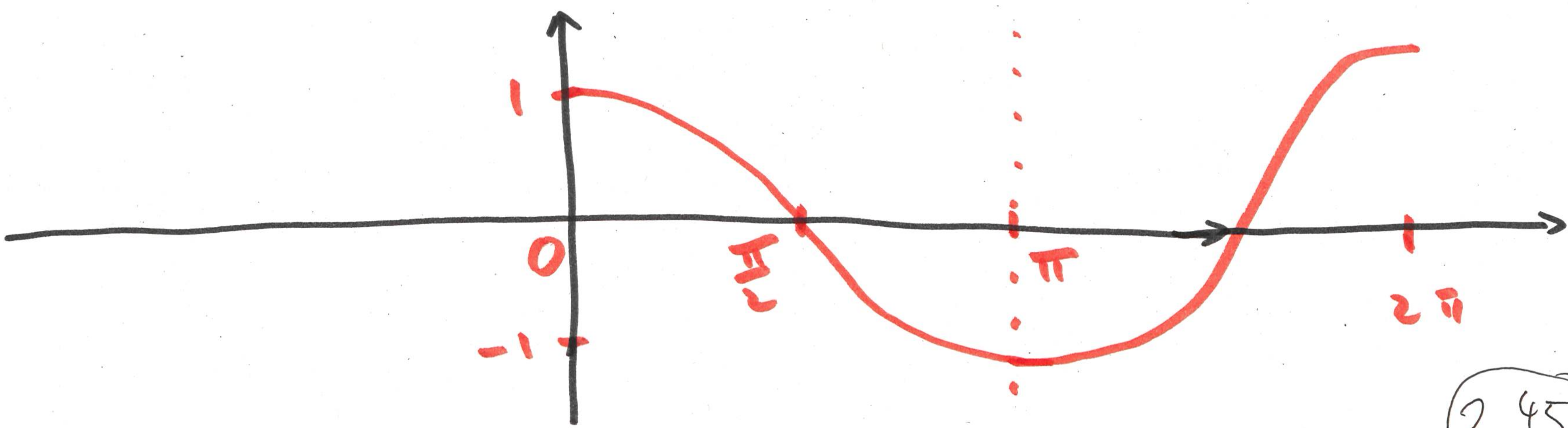
hat die Form $\begin{cases} a = \cos(\alpha) \\ b = \sin(\alpha) \end{cases}$

wo $\alpha \in [0, 2\pi[$ <u>eindeutig</u> ist.

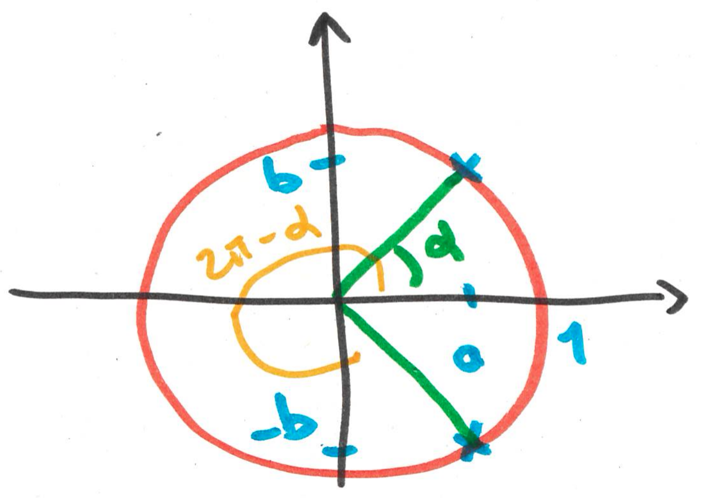


(2) cos ist streng fallend auf $[0, \pi]$

sin ist ___ wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Warum?



Falls $a = 1, \quad b = 0$

$\longrightarrow \alpha = 0$ ✓

Sonst

$-1 \leq a < 1$

Weil $\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1$

$\longrightarrow \alpha \in [0, \pi], \quad \boxed{\cos(\alpha) = a}$

Weil $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

$\longrightarrow \sin(\alpha)^2 = 1 - a^2 = b^2$

$\rightsquigarrow \boxed{\sin(\alpha) = b}$ oder $\boxed{\sin(\alpha) = -b}$

α Lösung ✓

$2\pi - \alpha$ Lösung

$\cos(2\pi - \alpha)$

$= \cos(-\alpha)$

$= \cos(\alpha) = a$

$\sin(2\pi - \alpha)$

$= \sin(-\alpha)$

$= -\sin(\alpha) = b$

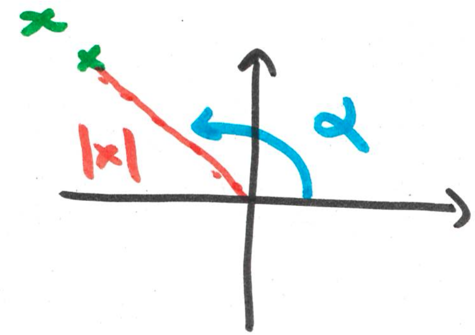
246

Warum ist cos fallend auf $[0,\pi]$?

Man sieht das cosinus <u>injektiv</u> ist auf $[0,\pi]$ $\Rightarrow$ streng monoton

$\Rightarrow$ streng fallend weil $\cos(0) > \cos(\pi)$.

Ähnlicherweise für sinus.



<u>Def.</u> $x \in \mathbb{C}$

Es gibt $\alpha \in [0, 2\pi[$, eindeutig falls $x \neq 0$,

mit $x = |x| e^{i\alpha}$

α: das <u>Argument</u> von x

($x \neq 0 \implies \left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$

$\implies \frac{x}{|x|} = e^{i\alpha}$ für $\alpha \in [0, 2\pi[$ eindeutig)

($(|x|, \alpha)$ heissen "Polarkoordinaten" von x)

<u>Anwendungen</u>:

(1) $x = |x| e^{i\alpha}$, $y = |y| e^{i\beta}$

$\implies xy = |xy| e^{i(\alpha+\beta)}$

[<u>Warnung!</u> $\alpha + \beta$ kann ~~[illegible]~~ $> 2\pi$ sein!]

(2) <u>Gleichungen</u>: $a \in \mathbb{C}$ gegebene Zahl

$(d \in \mathbb{N})$ $\quad X^d = a$, $\quad x \in \mathbb{C}$ <u>unbekannte</u>

<u>$a = 0$</u>: $x = 0$ einzige Lösung

<u>$a \neq 0$</u>: $a = |a| e^{i\alpha}$, $\quad 0 \leq \alpha < 2\pi$

Die Lösungen sind

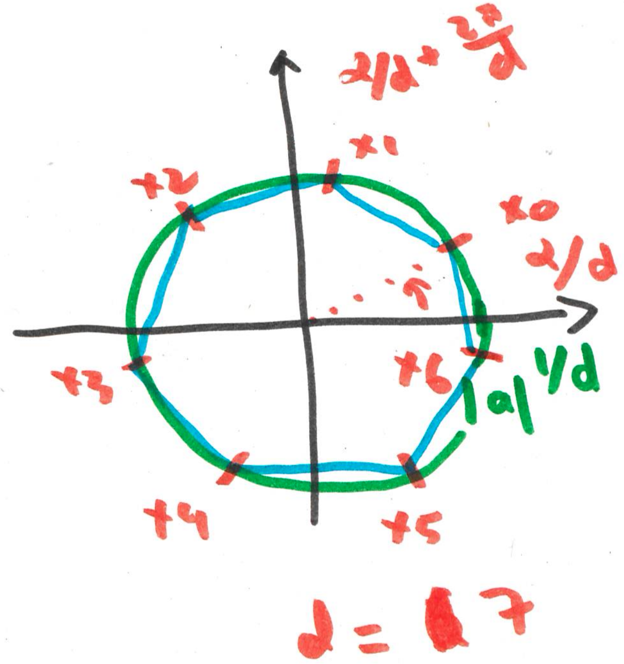
$$x_0 = |a|^{1/d} e^{\frac{i\alpha}{d}}$$

$$x_1 = |a|^{1/d} e^{\frac{i\alpha}{d} + \frac{2i\pi}{d}}$$

$$\vdots$$

$$x_{d-1} = |a|^{1/d} e^{i\frac{\alpha}{d} + \frac{(d-1)2i\pi}{d}}$$

$$\left(x_j^d = |a| e^{i\alpha + \frac{d\, i 2\pi j}{d}} = |a| e^{i\alpha + 2i\pi j} = |a| e^{i\alpha} = a \right)$$



249

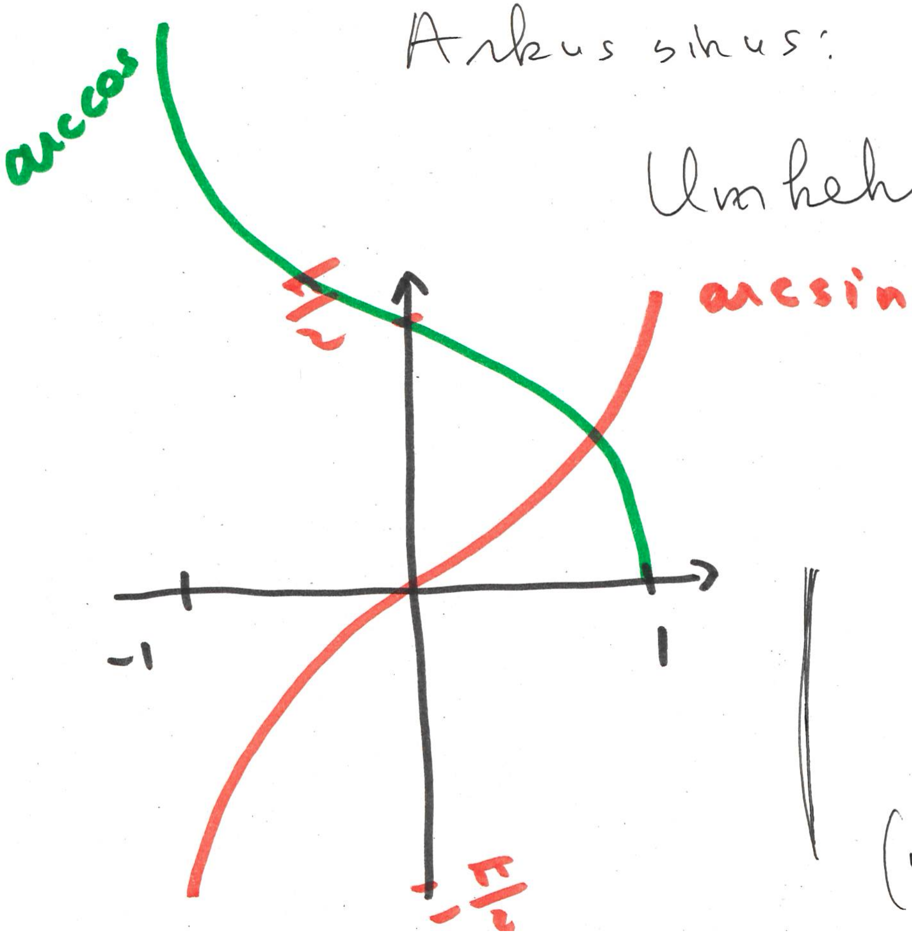
Def. (Winkelfunktionen)

Arkus Cosinus: $[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$

Umkehrfunktion von $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$

Arkus sinus: $[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Umkehrfunktion von $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$



Warnung!

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

aber

$$\arccos(\cos(x)) \neq x$$ im Allgemein!

(weil $\arccos(y) \in [0, \pi]$)

250

Kleine Zusammenfassung Kap. IV

1. Gleichmässige Konvergenz (+ Stetigkeit der Grenzwert)

2. Normale Konvergenz (⇒ gleich. Konv.) aber leichter zu überprüfen

3. Potenzreihen / Konvergenzradius

4. Exponential / Trig. Funktionen

\+ Umkehrfunktionen

Kap. 5

Ableitung / Differenzierbare Funktionen

Motivationen:

① bessere Approximationen einer Funktion in der Nähe von x_0?
[$f(x)$ mit einer <u>lineare</u> / Polyn. grad 1 $(ax+b)$ approximieren]

② leichter eigenschaften wie Monotonie überprüfen.

5.1. Definition / alg. Eigenschaften

Idee: $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

Wir suchen für $x_0 \in I$ das beste Polynom

$p(x) = a(x-x_0) + b$ um $f(x)$ zu approximieren für x in der Nähe von x_0.

$$b = p(x_0) = f(x_0)$$

Ziel:

$$a(x - x_0) + f(x_0) \approx f(x)$$

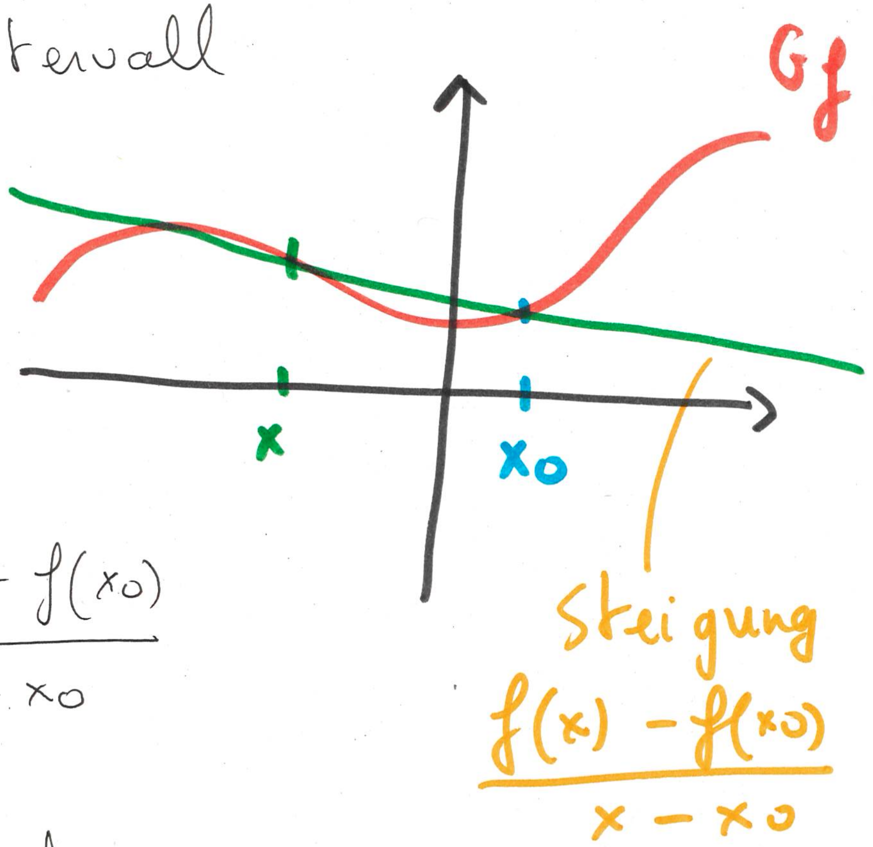
$\approx$ ist ungefähr

$$a \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Def. $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in I$



Falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \neq x_0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

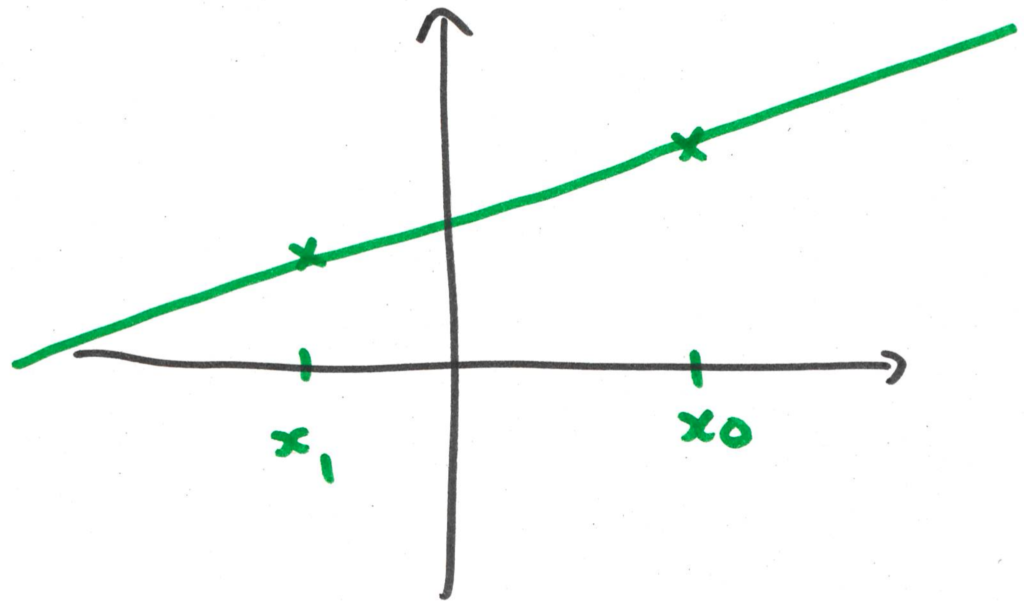
existiert, sagt man dass

- f ist an der Stelle x_0 differenzierbar
- der Grenzwert ist die Ableitung von f an x_0, bezeichnet $\boxed{f'(x_0)}$

Bem. die Gerade durch $(x_1, f(x_1))$, $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung

$$\boxed{y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

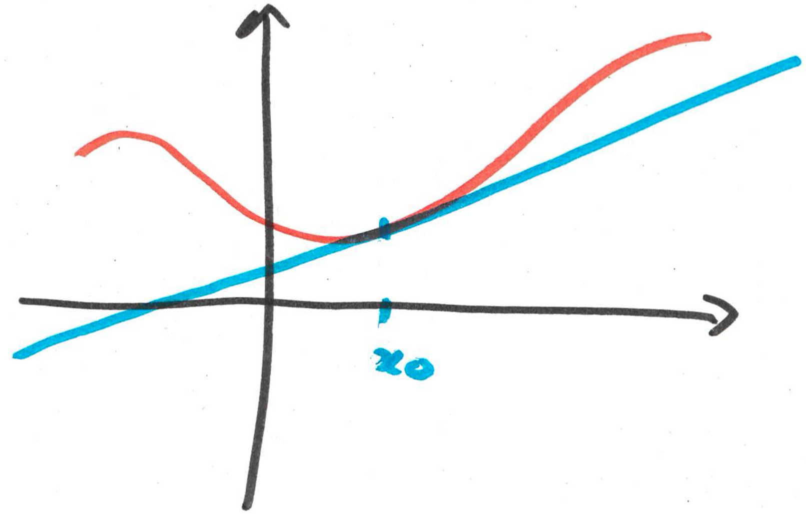
Steigung der Gerade



Def. Falls $f'(x_0)$ existiert, ist die Gerade

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

die **Tangente** an x_0



Def. Falls f ist auf x_0 diff. für **alle** $x_0 \in I$, sagt man dass f ist **auf I** differenzierbar; $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst **Ableitung** von f.

Bemerkungen:

1. f' existiert nicht immer!

(es gibt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ~~…~~, aber wo $f'(x_0)$ existiert für **keine** Zahl!

z.B. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(3^n x)}{3^n}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig hat **keine** Ableitung $f'(x_0)$)

2. [5.1.5]

Falls f diff. an x_0 ist, ist sie auch stetig an x_0.