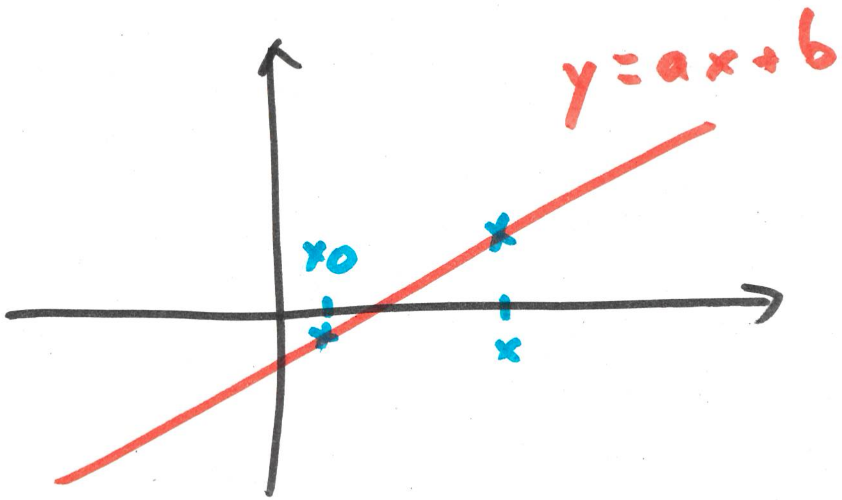
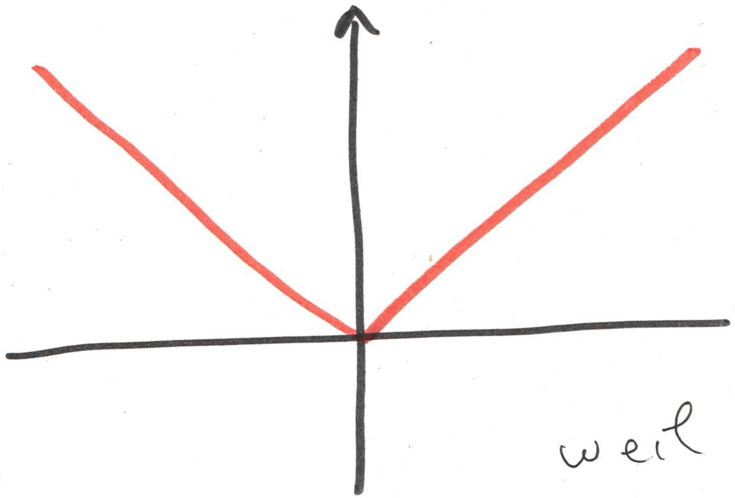
(3) $f(x) = ax + b$ ist differenzierbar mit

$f'(x) = \frac{1}{a}$ für alle x:



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

(4)



$f(x) = |x|$

ist an $\boxed{x_0 = 0}$

<u>nicht</u> differenzierbar

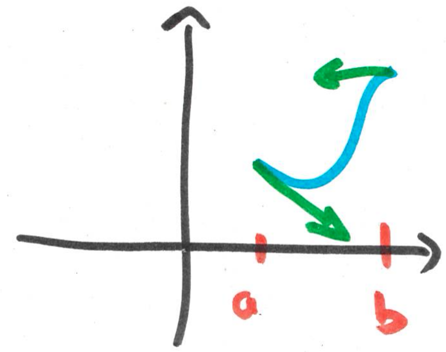
weil $\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

258

5

$I = [a, b]$, $x_0 = a$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Manchmal bezeichnet: $f'_{r}(a)$ <u>rechts</u>

oder $f'_{\ell}(b)$ <u>links</u>

Satz. [5.1.6] $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar

(1) $f + g$ ist diff. und $(f+g)' = f' + g'$

(2) [Leibnizsche Regel] fg ist diff. und

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(3) Falls $g(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist f/g diff.

und

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(insb. $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$)

(4) [Kettenregel] $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ (J Intervall)

f, g diff. $\Longrightarrow$ $g \circ f$ ist diff. und

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

[$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x))$]

(5) [Umkehrfunktion] f injektiv, $J = f(I)$ Bild von f, falls $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$, ist $f^{-1}: J \longrightarrow I$ ist diff.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \qquad \left[\text{d.h. } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\right]$$

Beweis.

(2) (Leibniz) $\quad x_0 \in I$

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$\underline{x \to x_0}$

$$g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

weil g stetig ist

(3)

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{1}{g(x)\,g(x_0)}}_{\xrightarrow{x \to x_0}\ \frac{1}{g(x_0)^2}} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\to\ -g'(x_0)}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot - g'(x_0)$$

(4) [Kettenregel] $\quad I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\xrightarrow{x \to x_0}\ g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to\ f'(x_0)}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

(5) [Umkehrfunktion]

$$I \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} J$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{für } x \in I$$

Kettenregel $\Rightarrow$

$$f'(x)\,(f^{-1})'(f(x)) = 1 \quad \text{für } x \in I$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$y = f(x)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Satz. [5.1.7]

(1) **Polynome** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

(**insb.** $(x^n)' = n x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

$(1)' = 0$)

(2) Exponential, cosinus, sinus sind auf $\mathbb{R}$ diff.

mit

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \cos' = -\sin \\ \sin' = \cos \end{cases}$$

(3) $\log : \,]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist diff. mit

$$(\log)'(x) = \frac{1}{x}$$

(4) $f(x) = x^a$ ist auf $]0, +\infty[$ diff.

mit $f'(x) = a\, x^{a-1}$, $x > 0$

(5) $\arccos : \,]-1, 1[\longrightarrow \,]0, \pi[$

$\arcsin : \,]-1, 1[\longrightarrow \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

sind diff. und

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis:

(1) (Polynome)

Für $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, wir benutzen Induktion:

$f_0 = 1 \longrightarrow$ diff. mit $f_0' = 0$

$f_1(x) = x \longrightarrow$ diff. mit $f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$

Hyp: f_n diff. mit $f_n'(x) = n x^{n-1}$

$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = f_n(x) f_1(x)$

$\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow}$ f_{n+1} differenzierbar mit

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) f_1(x) + f_n(x) f_1'(x)$$

$$= n\,x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1$$
$$= (n+1)\,x^n$$

(2) Wir benutzen

<u>Satz</u>: Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ Potenzreihen mit Konv. Radius $R > 0$; die Summe f ist auf $]-R, R[$ diff. mit

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a_{n+1} \cdot x^n$$

("wie ein Polynom mit Grad $+\infty$")

(siehe später)

Dann folgt:

exp'(x):

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\longrightarrow \exp'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \underbrace{\frac{\cancel{n}\, x^{n-1}}{\cancel{n!}}}_{\frac{1}{(n-1)!}} + \dots$$

$$= \exp(x)$$

cos'(x):

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots$$

$$\longrightarrow \cos'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \dots + \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n)!} 2n\, x^{2n-1}}_{= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}} + \dots$$

$$= -\sin(x)$$

(3) $\log = \exp^{-1} \quad (\exp: \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[)$

$\exp'(x) \neq 0$ für alle x

$\longrightarrow$ log ist differenzierbar auf $]0,+\infty[$

mit $$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$$

(4) $$f(x) = x^a = e^{a\log(x)} = (\exp \circ g)(x)$$

wo $g(x) = a\log(x)$

diff. weil log ist

<u>Kettenregel</u>: f differenzierbar mit

$$f'(x) = g'(x) \cdot \exp'(g(x))$$

$$= \frac{a}{x} e^{a\log(x)} = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}.$$

(5) $\arccos =$ Umkehrfunktion von

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$\cos' = -\sin$$

Weil $\sin(x) > 0$ für $0 < x < \pi$ $\longrightarrow$

$\arccos :]-1, 1[\longrightarrow]0, \pi[$ ist diff. mit

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))}$$

$$= -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[weil $\sin(\arccos(x))^2 + \cos(\arccos(x))^2 = 1$

$\Rightarrow \sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$

270

$\Rightarrow \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ weil $\arccos(x) \in [0, \pi]$

Beispiel

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$I = \,]1, +\infty[$$

$f = \log \circ g$ wo $g(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

$\longrightarrow$ f auf I differenzierbar mit

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

weiter $$g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

so $$f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

5.2. Ableitung von Grenzwerte

Bem. Falls $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert gegen $f(x)$ für $x \in I$, und jede f_n differenzierbar ist, folgt **nicht** immer das f differenzierbar ist, auch wenn $f_n \to f$ gleichmässig.

Bsp: jede $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind gleichmässig Grenzwert einer Folge von Polynome.

Satz. [5.2.2]

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar [$\Rightarrow$ stetig]

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Hyp. $\begin{cases} \cdot\ f'_n \text{ sind stetig} \\ \cdot\ f_n \longrightarrow f \quad \underline{\text{gleichmässig}} \text{ auf } I \\ \cdot\ f'_n \longrightarrow g \quad \underline{\qquad\qquad} \text{ für eine Funktion } g \end{cases}$

$\Longrightarrow$ f ist auf I differenzierbar, und

$f' = g$, g stetig

$\left[\ (\lim_n f_n)' = \lim_n f'_n \ \right]$

<u>Beispiel</u>

(a_n), $\sum a_n x^n$ mit ~~hat~~ $R > 0$ Konvergenzradius

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\cancel{+\infty}} a_n x^n \quad , \quad x \in \,]-R, R[$$

$$= \lim_{\substack{\cancel{n\to\infty} \\ n \to \infty}} s_n(x) \qquad \text{wo}$$

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$s_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

(stetig)

$s_n \longrightarrow f$ gleichmässig auf $]-r, r[$

für $r < R$

s'_n = p. Summe von $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n}$

hat $R > 0$ als Konv. radius

$s'_n \longrightarrow g$ auch gleichmässig auf $]-r, r[$

Satz $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar auf $]-R, R[$

mit $f'(x) = \lim s'_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$