Def. [2.10.6]

Eine Reihe $\sum a_n$ <u>konvergiert absolut</u> falls $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergent ist.

$\left(\Longleftrightarrow \ \exists R, \ \underbrace{|a_1| + \dots + |a_n| \le R}_{\forall n \in \mathbb{N}} \right)$

Satz. [2.10.7]

Jede <u>absolut konvergente</u> Reihe $\sum a_n$ konvergiert und

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Beweis der Dreiecksungleichung:

für jede n gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$$

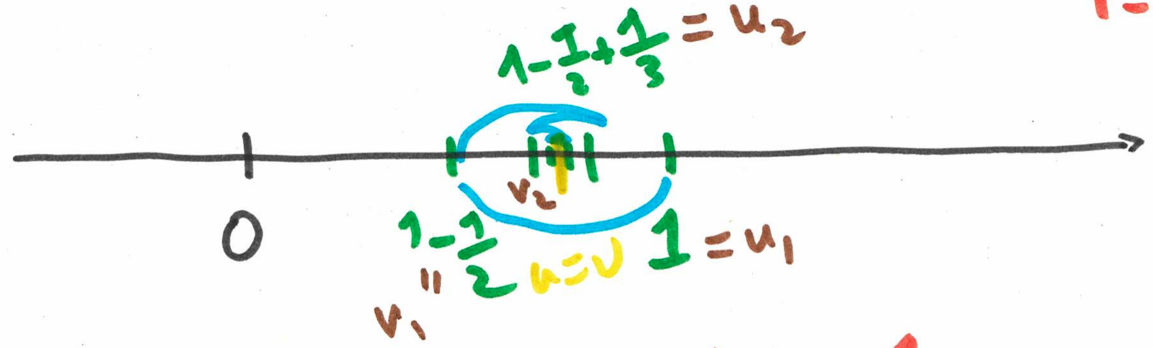
$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right|$$

Beispiel. Es gibt Reihen die konvergieren, aber **nicht** absolut.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

① $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ und $\sum \frac{1}{n}$ ist **nicht** konvergent $\rightsquigarrow$ diese Reihe kann nicht absolut konvergent sein.

② $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$



$$u_n = s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = s_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

Dann:

$$v_1 \leq \dots \leq v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \dots \leq u_1$$

$\Rightarrow$ (v_n) ist wachsend, beschränkt

(u_n) — fallend, ——

$\Rightarrow$ es existiert $u = \lim u_n$, $\lim v_n = v$

$$u_n - v_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow u = v$$

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n$ existiert und ist $= u = v$

Satz [2.10.10]

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\begin{cases} a_n \in \mathbb{R}^+ \\ a_{n+1} \leq a_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$

[z.B. $a_n = \frac{1}{n}$]

Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

("alternierende Reihe")

__Bemerkung:__ absolut konvergente Reihen sind "viel besser" als konv. / nicht abs. Reihen.

__Beispiel.__ $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2$
$= a_2 + a_1 + a_3$

__Def.__ Sei $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ eine Reihe.
Eine __Umordnung__ der Reihe ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ mit

$$b_k = a_{f(k)}$$

wo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist __bijektiv__.

[7.B $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

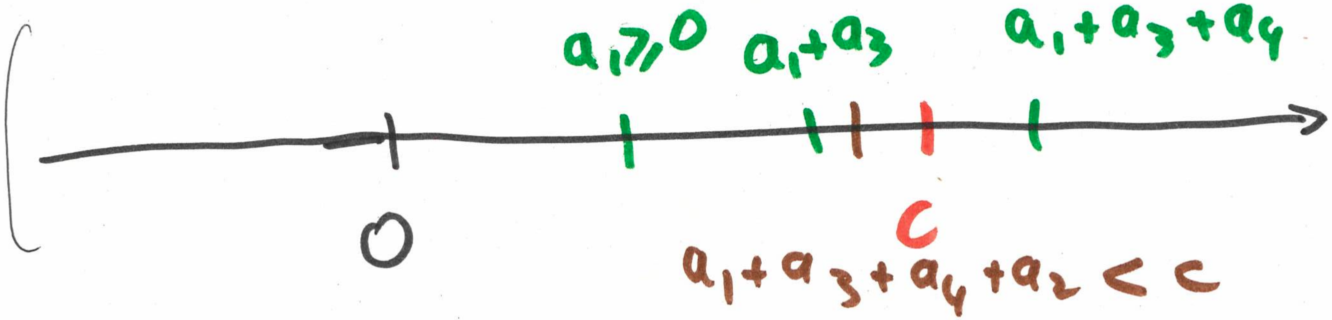
$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \dots$]

Satz. 1. Falls $\sum a_n$ abs. konvergent ist, ist jede Umordnung $\sum b_k$ auch abs. konv. und

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

2. Falls $a_n \in \mathbb{R}$, und $\sum a_n$ konv. nicht abs., dann für alle $c \in \mathbb{R}$, es gibt eine Umordnung $\sum b_k$ die konv. ist mit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = c$$



$a_2 < 0$

$a_4 \geq 0$

$a_1, a_3 \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \quad \text{nicht konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_{a_n \geq 0} a_n \quad \text{nicht konvergent}$$

$$\left[\sum |a_n| = \sum_{a_n \geq 0} a_n - \sum_{a_n < 0} a_n \right.$$

$$\left. \text{und} \quad \sum_{a_n \geq 0} a_n + \sum_{a_n < 0} a_n = \sum a_n \quad \text{existiert} \right]$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n \to 0$$

[siehe Skript von Prof. Burger]

Falls $a_n = \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n}$$ konvergiert, nicht absolut

---

<u>Konkreterweise:</u> um zu überprüfen dass $\sum a_n$ absolut konvergent ist, man versucht eine Ungleichung

$$|a_n| \leq b_n$$

zu finden, mit $\sum b_n$ konvergent.

$$\left(\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum b_n \right)$$

Falls $|a_n| \geq b_n$ und $\sum b_n$ ist <u>nicht</u> konvergent, dann konvergiert $\sum a_n$ <u>nicht absolut</u>.

<u>Satz:</u> (2.10.11)

(1) <u>$k > 0$</u> $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ ist (abs.) konv. falls $k > 1$, <u>nicht</u> konv. falls $k \leq 1$.

[z. B. $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert]

(2) $k \in \mathbb{R}$, $|b| > 1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{b^n}$ konvergiert absolut (und konvergiert nicht falls $k \geq 0$ und $|b| \leq 1$)

(3) $a \in \mathbb{C}$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergiert absolut.

Beweis:

1 $\quad \sum \frac{1}{n^k}$

$\underline{k=1}$: $\sum \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent [Seite 118]

$\underline{k<1}$: $\frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{n} \Longrightarrow$ die Reihe $\sum \frac{1}{n^k}$ konvergiert nicht.

$\underline{k>1}$: sei $n \in \mathbb{N}$, sei m s.d. $n \leq 2^m - 1$

$$1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k} \leq 1 + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^k}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{7^k}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{m-1})^k} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^k}\right)$$

$$\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^k} + 4 \cdot \frac{1}{4^k} + \dots + 2^{m-1} \frac{1}{(2^{m-1})^k}$$

anzahl der Zahlen

grösste Zahl

$$= 1 + 2^{1-k} + (2^{1-k})^2 + \dots + (2^{1-k})^{m-1}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ mit $a = 2^{1-k}$, $0 < a < 1$, ist konvergent [Seite 127]

$$\Rightarrow \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{+\infty} a^k}_{}$$

für alle n

$$\Rightarrow \quad \sum \frac{1}{n^k} \text{ ist konvergent für } k > 1.$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{b^n} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad |b| > 1$

<u>$k = 0$:</u> $\displaystyle\sum \frac{1}{b^n} = \sum \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/b}$

(abs. konv. Reihe weil $\displaystyle\left|\frac{1}{b^n}\right| = \frac{1}{|b|^n}$ mit $\left|\frac{1}{b}\right| < 1$)

<u>$k \le 0$:</u> $\displaystyle\left|\frac{n^k}{b^n}\right| \le \frac{1}{|b|^n} \Rightarrow$ abs. konv.

<u>$k > 0$:</u>

__Idee:__ $\frac{n^k}{b^n}$ mit $\frac{1}{c^n}$ vergleichen, wo

$$|b| > c > 1$$

__Ziel:__ z.B. $\left|\frac{n^k}{b^n}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{c^n}$ für solche c

und $\underline{n \geq N}$

Warum ist das den Fall?

Weil $\lim_{n\to\infty} c^n \cdot \left|\frac{n^k}{b^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^k}{\underbrace{(b/c)^n}_{|b/c|>1}}\right| = 0$

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$c^n \left|\frac{n^k}{b^n}\right| \leq \frac{1}{2}$$

für $n \geq N$.

3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ $a \in \mathbb{C}$

$\frac{a^n}{n!} \to 0$ aber weiter

$\frac{(2|a|)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ es gibt $N \in \mathbb{N}$ sodass

$\frac{(2|a|)^n}{n!} \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq N$

$\Rightarrow \frac{|a|^n}{n!} = \left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$ für $n \geq N$

Weil $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergiert, ist $\sum \frac{a^n}{n!}$ abs. konv.

146

z. B.

$$\sum \frac{\cos(\pi \exp(\sin(n!(3^n+\sqrt{\pi}))))}{n! \quad n^2}$$

$$\left| \frac{\cos(\sim\!\sim)}{n! \; n^2} \right| \leq \frac{1}{n!} \; \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ die Reihe konvergiert absolut

und $\left| \sum \frac{\cos(\text{—})}{n!} \right| \leq \sum \frac{1}{n!}$

Bemerkung: wir wissen dass verschiedene Reihen konvergieren; was sind ihre Summen?

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \zeta(k)$ "Riemannsche Zeta Funktion"

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$ ist ~~auch~~ rat. Zahl mal π^{2k}

man weist nicht ob $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \in \mathbb{Q}$ oder nicht ...

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{1 - 1/b} = \frac{b}{b-1}$

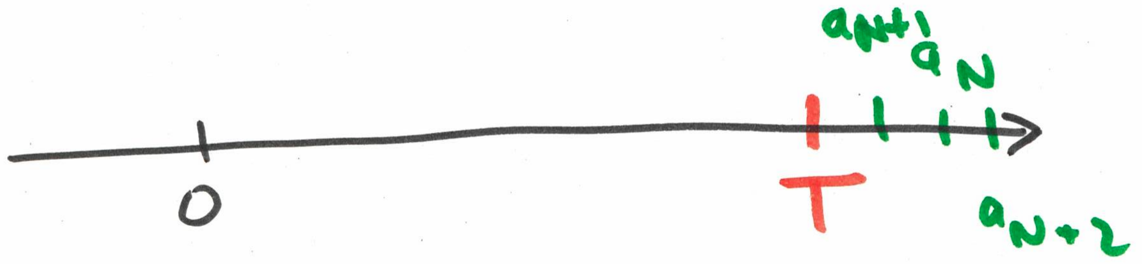
(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = \exp(a)$ $a \in \mathbb{C}$

2.11. Konvergenz gegen $+\infty$ und $-\infty$

Def. (a_n) Folge von reellen Zahlen

(1) (a_n) konvergiert gegen $+\infty$

$\iff \forall T \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ a_n \geq T$



[z.B. $a_n = n$]

(2) (a_n) konvergiert gegen $-\infty$

$\iff \forall T \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ a_n \leq T$

[z.B. $a_n = -n^2$]

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Bemerkung: $a_n = (1 + (-1)^n) n$

diese Folge konvergiert nicht $(a_{2n} = 2n)$

und konvergiert nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ $(a_{2n+1} = 0)$