$$I_k = \int_a^b \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \int_a^b \frac{1 \cdot dt}{(t^2+1)^k}$$

$g_1' = 1,\ g_1 = t$
$g_2 = \frac{1}{(t^2+1)^k}$

$$= \left[\frac{t}{(t^2+1)^k}\right]_a^b - k\int_a^b \frac{2t\,(t^2+1)^{k-1}}{(t^2+1)^{2k}}\,dt$$

$$= \quad '' \quad - 2k \int_a^b \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt$$

aber

$$\int_a^b \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt = \int_a^b \frac{(t^2+1) - 1}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt$$

$$= I_k - I_{k+1}$$

d.h.

$$I_k = \frac{b}{(b^2+1)^k} - \frac{a}{(a^2+1)^k} - 2k\,(I_k - I_{k+1})$$

426

$$\Rightarrow \quad I_{k+1} = \frac{1}{2k}\left[(1+2k)\, I_k - \frac{b}{(b^2+1)^k} + \frac{a}{(a^2+1)^k} \right]$$

(
z.B.

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[3\,(\arctan(b) - \arctan(a)) - \frac{b}{(b^2+1)} + \frac{a}{(a^2+1)} \right]$$
)

z.B. $f(x) = \int_1^x \frac{t^2+t}{\underbrace{6t^3-t^2+t-1}_{g(t)}}\, dt = ?$

Schritt 1 : $6t^3 - t^2 + t - 1 = (2t-1)\underline{(3t^2+t+1)}$

$1^2 - 4 \cdot 3 = -11 < 0$

427

Wir wollen $f(x)$ berechnen für $x \geq 1$.

<u>Partialbruchzerlegung:</u> $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \frac{\alpha}{2t-1} + \frac{\beta t + \gamma}{3t^2+t+1}$$

$\underline{\underline{\alpha}}$:

$$\lim_{t \to \frac{1}{2}} (2t-1)\, g(t) = \alpha + 0$$

$$\| $$

$$\lim_{t \to \frac{1}{2}} \frac{(2t-1)(t^2+t)}{(6t^3-t^2+t-1)} = \lim_{t \to \frac{1}{2}} \frac{t^2+t}{3t^2+t+1}$$

$$= \frac{3/4}{9/4} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$$

428

γ

$$0 = g(0) = -\alpha + \gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{3}}$$

β

Entweder $\begin{cases} t = 1 \text{ benutzen} \\ t \to \infty \text{ (nach Mult. mit } t) \end{cases}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$g(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2t-1} + \frac{1}{3t^2+t+1}\right)$$

(Kann überprüft sein!)

Schritt 2:

$$f(x) = \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{2t-1} + \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{3t^2+t+1}$$

$$= \frac{1}{6}\log(2x-1) + \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{3t^2+t+1}$$

$$3t^2+t+1 = 3\left(t^2+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= 3\left(\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{36}\right)$$

$$= 3\left(\left(t+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \int_1^x \frac{dt}{3t^2+t+1} = \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{(t+1/6)^2+\frac{11}{36}}$$

$$\left(u = t+\frac{1}{6}, \quad du = dt\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int_{7/6}^{x+1/6} \frac{du}{u^2+\frac{11}{36}}$$

$$u^2+\frac{11}{36} = \frac{11}{36}\left(\frac{36u^2}{11}+1\right)$$

$$= \frac{11}{36}\left(\left(\frac{6u}{\sqrt{11}}\right)^2+1\right)$$

$$v = \frac{6u}{\sqrt{11}}, \qquad dv = \frac{6\,du}{\sqrt{11}} \iff du = \frac{\sqrt{11}}{6}\,dv$$

$$\frac{1}{3}\int_{7/6}^{x+1/6} \frac{du}{u^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{11}{36}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \int_{\frac{6 \cdot 7/6}{\sqrt{11}}}^{\left(\frac{6x}{\sqrt{11}} + 1/6\right)} \frac{dv}{v^2+1}$$

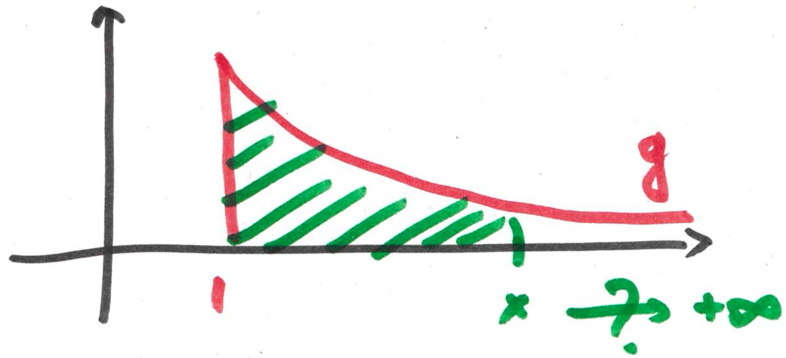
$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \int_{7/\sqrt{11}}^{\frac{6x}{\sqrt{11}} + \frac{1}{6}} \frac{dv}{v^2+1}$$

$$= \ldots \text{arctan} \ldots$$

432

6.5 – Uneigentlichle Integrale

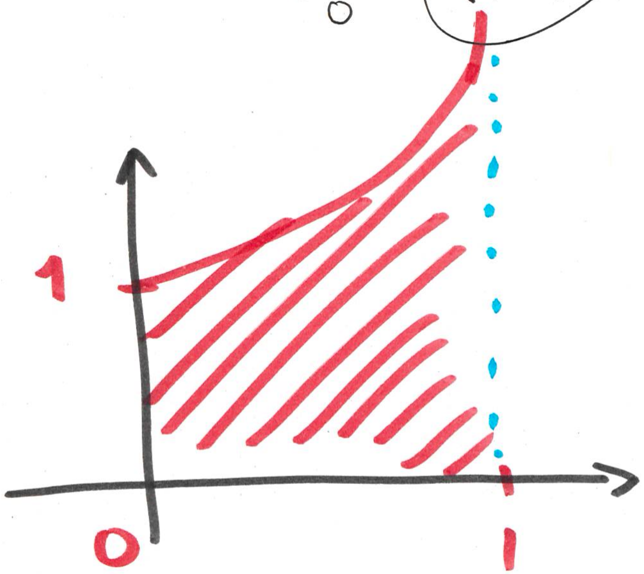
$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt = \,?$$



oder

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \,?$$

stetig auf $[0, 1[$



Das Integrale wäre den Flacheninhalt von

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x < 1,\; 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right\}$$

Def. (1) Sei $g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Man sagt dass

$$\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$$

existiert ("uneigentliches Integral von g auf $[a, +\infty[$")

wenn

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x g(t)\, dt$$

existiert; man schreibt $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_a^x g(t)\, dt$

(2) Ähnlicherweise:

$$\int_{-\infty}^b g(t)\, dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b g(t)\, dt$$

$$\int_a^b g(t)\,dt = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x g(t)\,dt$$

(falls g auf $[a,b[$ stetig ist)

$$\int_a^b g(t)\,dt = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b g(t)\,dt$$

(g auf $]a,b]$ stetig)

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existiert falls

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt$ und $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$

existieren, und dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

__Warnung!__ diese Definition ist __nicht__

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} g(t)\,dt \quad !$$

(Man überprüft dass wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existiert, ist es gleich

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} g(t)\,dt,$$

aber der Grenzwert kann existieren, wenn das uneigentliches Integral nicht.)

(4) $g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^{x_0} g(t)\,dt + \int_{x_0}^b g(t)\,dt$$

wo $x_0 \in]a,b[$ (die rechte Seite hängt nicht von x_0 ab).

Eigenschaften:

Linearität:

$$\int_a^{+\infty} (\alpha g_1(t) + \beta g_2(t))\,dt = \alpha \int_a^{+\infty} g_1(t)\,dt + \beta \int_a^{+\infty} g_2(t)\,dt$$

(falls g_1, g_2 uneigentliche Integrale haben).

Es gilt auch: für $b \geq a$, g auf $[a, +\infty[$ stetig

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \int_b^{+\infty} g(t)\,dt$$

(auch für andere uneigentliche Integrale).

Bemerkung: uneigentlich Integrale haben viele Eigenschaften wie diesen von Reihen.

Notation: man sagt auch oft " das Integral $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ konvergiert"

Satz. (6.5.2)

$g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $b = +\infty$ erlaubt

(1) [Vergleichung] Falls es gibt

$g_1 : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$

mit $|g(t)| \leq g_1(t)$

<u>und</u> $\int_a^b g_1(t)\, dt$ existiert, dann

existiert $\int_a^b g(t)\, dt$ und

$$\left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \leq \int_a^b g_1(t)\, dt$$

$|a_n| \leq b_n$ und $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv. abs.

(2) Falls $g \geq 0$, existiert $\int_a^b g(t)\, dt$

genau dann wenn es gibt $M \geq 0$ mit

$\int_a^x g(t)\, dt \leq M$ für $a \leq x < b$.

(3) Falls $g \geq g_1$ wo $g_1 \geq 0$ und $\int_a^b g_1(t)\,dt$ existiert nicht, dann hat g kein uneigentliches Integral auf $[a,b[$.

Beweis im Skript ((1) ist Anwendung vom Cauchy Kriterium, (2), (3) ähnlich zum Fall von Reihen).

Beispiele:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

$(x \geq 1)$

$$\int_1^x \frac{1}{t^c}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-c}\left(x^{1-c} - 1\right) & , \quad c \neq 1 \\ \log(x) & , \quad c = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{c-1} & c > 1 \\ +\infty & c < 1 \\ +\infty & c = 1 \end{cases}$$

D.h. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert, und ist $= \frac{1}{c-1}$

$\iff c > 1$

(**z.B.** $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(t)}{t}\,dt$ existiert nicht)

Bem. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert

$\Updownarrow$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^c}$ konvergiert

(2) $\int_0^1 \frac{1}{t^c}\,dt$?

$c \in \mathbb{R}$

$c \le 0 \Rightarrow$ stetig auf $[0,1]$

$0 < x \le 1$

$$\int_x^1 \frac{1}{t^c}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-c}\left(1 - x^{1-c}\right), & c \neq 1 \\ -\log(x), & c = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} \frac{1}{1-c}, & c < 1 \\ +\infty, & c > 1 \\ +\infty, & c = 1 \end{cases}$$

<u>d.h</u> $\int_0^1 \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert $\Leftrightarrow$ <u>$c < 1$</u>

<u>Bsp.</u> ① + ② $\Longrightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert für <u>keine $c \in \mathbb{R}$</u>

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^c}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$$

Existiert für $c<1$, $c>1$

3) $\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt, \qquad a \in \mathbb{R}$

$(x \geq 0)$

$$\int_0^x e^{-at}\, dt = \begin{cases} -\frac{1}{a} e^{-ax} + \frac{1}{a}, & a \neq 0 \\ x, & a = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x \to \infty]{} \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \\ +\infty, & a = 0 \end{cases}$$

Anwendung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \quad ?$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \quad ?$$

$$t^2 \geq t \quad \text{für} \quad t \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad e^{-t^2} \leq e^{-t} \quad \text{für} \quad t \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{\infty} e^{-t^2}\,dt \leq \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt}_{\text{existiert}}$$

weil

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ existiert

und $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existiert

$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$?

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-t^2}\,dt \le \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} e^{t}\,dt}_{\text{existiert auch (wie im Bsp. (3))}}$$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$ existiert

447