2. Natürliche, Ganze Zahlen, rat. Zahlen, Induktionsprinzip

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \geq 1 \right\}$$

$+$, $\cdot$, $-$, $/$, $<$, $\leq$

Add. Mult. Di~~v~~idieren

Induktionsprinzip: (K., 1.1) Königsberger

Es seien Aussagen $A(n)$ wo $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \in \mathbb{N}_0$)

Ziel: wir wollen beweisen, dass
$(\forall n, A(n))$
d.h. $A(n)$ gilt für jede $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \in \mathbb{N}_0$)

Es genugt, zwei folgenden Eigenschaften zu überprüfen:

1. $A(1)$ gilt [bzw. $A(0)$]
2. falls $A(n)$ gilt, für eine $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \in \mathbb{N}_0$), dann gilt auch $A(n+1)$

[oder (2') falls $A(1), A(2), \ldots, A(n)$ gelten,
so gilt $A(n+1)$]

Beispiel: x Zahl, $x \neq 1$

$n \in \mathbb{N}_0$

$A(n)$
$n \in \mathbb{N}_0$

$$\boxed{\underbrace{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}_{\substack{= \\ x^0 \quad n+1 \text{ Zahlen}}} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

(z. B. $\underline{n=0}$: $1 \overset{?}{=} \frac{1-x^1}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$

$\underline{n=1}$: $1 + x \overset{?}{=} \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$)

Beweis: Induktion ✓
- Schritt (1) schon fertig
- Nehmen wir an, $n \geq 0$, und $A(n)$ gilt

$A(n+1)$?

$$\underbrace{1 + x + \cdots + x^n}_{= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}} + x^{n+1}$$

$A(n)$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

$$= \frac{1 - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1 - \cancel{x^{n+1}} + \cancel{x^{n+1}} - x^{n+2}}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

d.h. $A(n+1)$.

Fakultät: $n \in \mathbb{N}_0$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{mit der Konvention } \underline{0! = 1}$$

„n Fakultät"

Es gilt: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!, \quad n \in \mathbb{N}_0$

[z. B. $n=0$: $1! = 1 \cdot 0!$, $1 = 1$ ✓]

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 120, \quad 6! = 720$

3. Mengen

„Eine (math.) Menge ist eine Sammlung von (math.) Objekte, ungeordnet, die durch ihre Elemente bestimmt ist."

X : Menge

a : Element von X ; $a \in X$ → „gehört"

$(X = Y) \iff \forall a \, ((a \in X) \iff (a \in Y))$

X, Y: Mengen

Beispiele. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$X = \{-1, 0, 1, 15\}$
$= \{-1, -1, 0, 1, 15\} = \{0, -1, 15, 1\}$

X gegebene Menge

$$Y = \{ a \in X \mid A(a) \text{ gilt} \}$$

"sodass"

<u>z.B.</u> $X = \mathbb{Z}$

$$Y = \{ a \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt } c, d, e, f \in \mathbb{Z},\ a = c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \}$$

$-1 \notin Y$, $\quad 4 \in Y$

"gehört nicht"

$(4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$

(<u>Satz</u> (Lagrange): $Y = \mathbb{N}_0$)

Operationen:

1. **Vereinigung**

$X \cup Y$: die Menge s.d. $a \in X \cup Y$

Vereinigung

$\Updownarrow$

entweder $a \in X$ oder $a \in Y$

$[(a \in X \vee a \in Y)]$

z.B. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

2. **Durchschnitt**

$X \cap Y$: die Menge s.d. $a \in X \cap Y$

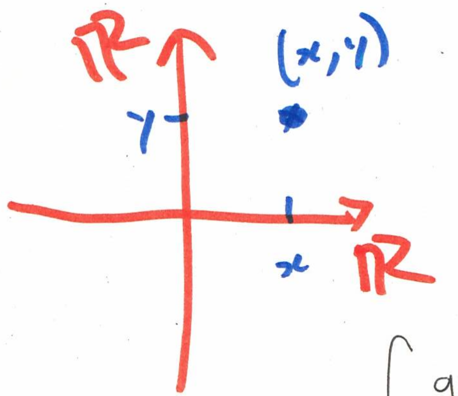
$\iff (a \in X$ **und** $a \in Y)$

z.B. $\mathbb{Z} \cap \{a \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq a \leq 1\}$
$= \{0, 1\}$

$$\mathbb{Z} \cap \{ a \in \mathbb{Q} \mid 0 < a < 1 \} = \emptyset$$

die <u>Leermenge</u> enthaltet <u>kein</u> Element

3 <u>Produkt</u>



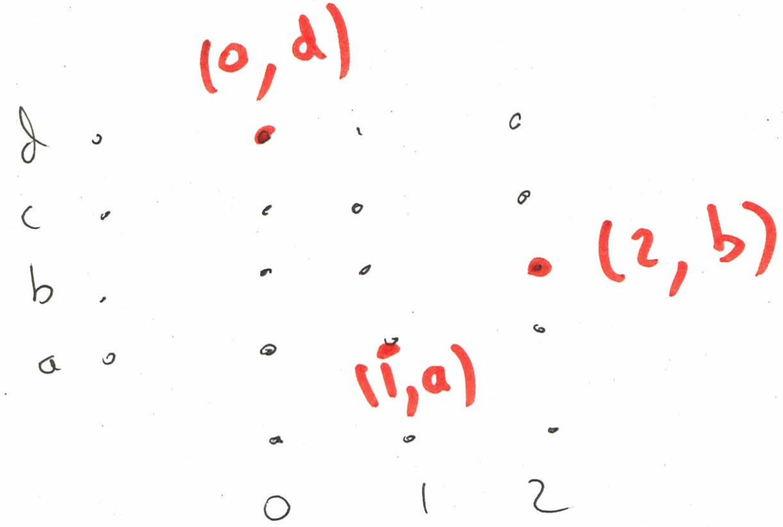
$X \times Y$ = Menge aller <u>geordnete</u> Paare (x,y) mit $\begin{cases} x \in X \\ y \in Y \end{cases}$

[<u>geordnet</u>: $(1,2) \neq (2,1)$
$(1,1) \neq (1)$

$$\{0, 1, 2\} \times \{d, a, b, c\}$$

$$=$$

$$\{ (0,a), (0,b), (0,c), (0,d), (1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d) \}$$



$$(0,d) \neq (d,0)$$

[**Auch**: $X \cap Y \cap Z \cap \dots$

$X \cup Y \cup Z \cup \dots$

$X \times Y \times Z \dots$]

Teilmengen / Enthaltung

X Menge

Sei Y sodass alle $a \in Y$ gehören X;

[z.B. $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$] dann sagen wir dass

Y eine <u>Teilmenge von X</u> ist, bezeichnet

$$Y \subset X$$

$\subset$ "ist enthalten in"

[z.B. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$]

Bsp. $\emptyset \subset X$ (unabhängig von X)

$$X \subset X$$

$$X \cap Y \subset X, \quad X \cap Y \subset Y$$

$$X \subset X \cup Y, \quad Y \subset X \cup Y$$

Falls X endlich ist: die <u>Kardinalität</u> (oder Mächtigkeit) von X ist die Anzahl der Elemente von X, bezeichnet $\mathrm{Card}(X) \in \mathbb{N}_0$.

Bsp. $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$

$$\mathrm{Card}(\{1, 2, 3\}) = 3$$

$$\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X) \cdot \mathrm{Card}(Y)$$

4. Abbildungen

Beispiele von Gleichungen sind ganz unterschiedlich:

- alg. Gleichungen
  (z.B. $x^2 + 3x - 1 = 0$)
- Newtonsche Gleichungen
  (Unbekannte ist die Bahn einem Teilchen)
- Maxwellsche Gleichungen
  (für jede Zeit t, jede Punkt im Raum, die Werte von Elektrische/Magnetische Felde)
- ....

Wir wollen formalerweise <u>alle</u> mögliche Gleichungen behandeln.

Wir stellen eine Gleichung dar in der Form

$$f(x) = y$$

wo : x (Unbekannte) gehört X

y ein Element einer Menge Y

f ist eine <u>Abbildung</u> zwischen X und Y

[d.h. für jede $x \in X$ ist genau <u>ein</u> Element $f(x)$ von Y definiert]

[z.B. $X = Y = \mathbb{R}$
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$]

Notation: $f: X \longrightarrow Y$

X: Definitionsmenge

Y: Zielmenge

„x ist auf $f(x)$ abgebildet"

Bsp.

$f_1: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f_1(x) = -x$

$f_2: X\ \cancel{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$f_2(n) = \frac{1}{n}$, $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 0\}$

$f_3: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$f_3(x) = (x, x^2)$

$f_4: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$f_4(x, y) = x + y$