(4) <u>Warnung:</u> viele ei~~g~~genschaften von ~~[illegible]~~ uneig. Int. sind ähnlich zur eig. von Reihen.

Das gilt <u>nicht</u> für alle.

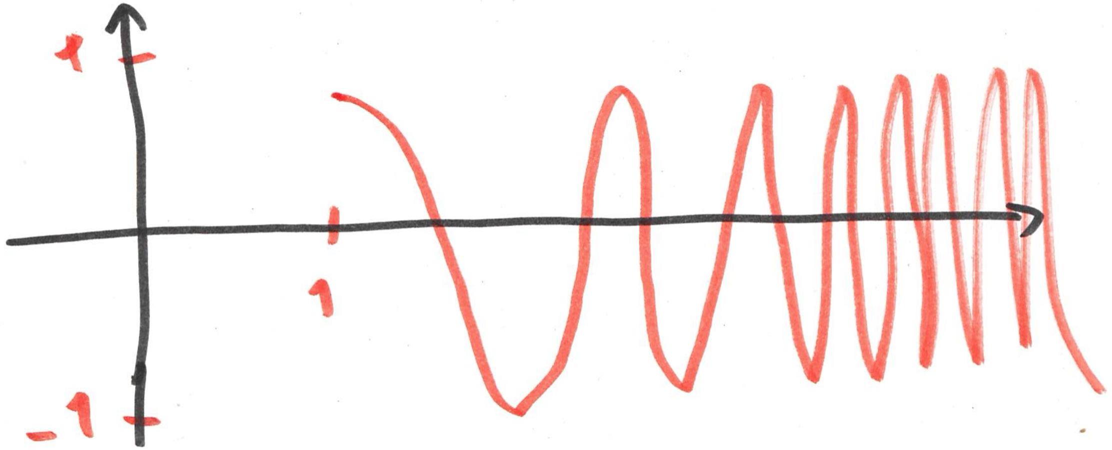
<u>z. B.</u> $\sum a_n$ konv. $\Longrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

aber es gibt $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

mit (i) $g(x)$ konv. nicht gegen 0 als $x \longrightarrow +\infty$

(ii) $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ existiert

Sei $g(x) = \cos(x^2), \quad x \geq 1$



$\int_1^{\infty} \cos(t^2)\, dt$ existiert!

obwohl $\lim_{x \to \infty} \cos(x^2)$ existiert nicht

$$\int_1^x \cos(t^2)\, dt = \int_1^{x^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\, du$$

Substitutionsregle: $u = t^2$
$t = \sqrt{u}, \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

$\int_1^\infty \frac{1}{u^c}\,du$ existiert nur für $c > 1$

(Bsp. (1))

aber $\int_1^{x^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{\sin(x^2)}{2x} - \frac{\sin(1)}{2} + \frac{1}{4}\int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\,du$

$g_1' = \cos(u), \quad g_1 = \sin(u)$

$g_2 = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g_2' = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)u^{-3/2}$

Als $\underline{x \longrightarrow +\infty}$: $\frac{\sin(x^2)}{2x} - \frac{\sin(1)}{2} \longrightarrow -\frac{\sin(1)}{2}$

$\cancel{\left|\int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\,du\right| \le \int_1^\infty \frac{1}{u^{3/2}}\,du}$

450

und
$$\left|\frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$$

und das uneig. Integral $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$

existiert (Bsp. (1)) $\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\, du \quad \text{existiert}$$

d.h.
$$\int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\, du \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_1^{\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\, du$$

$$\rightsquigarrow \quad \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt \quad \text{existiert}$$

(5) $\Gamma(c) = \int_0^{+\infty} t^{c-1} e^{-t} \, dt$

"Eulersche Gamma Funktion"

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist das Integral konvergent?

$g(t) = t^{c-1} e^{-t}$ ist auf $]0, +\infty[$ stetig

(auf $[0, +\infty[$ stetig falls $c \geq 1$)

① $\int_0^1 t^{c-1} e^{-t}\, dt$ existiert **nur** wenn

$c-1 > -1 \iff c > 0$

[weil $|t^{c-1} e^{-t}| \leq t^{c-1}$, $t > 0$

(und $\int_0^1 \frac{dt}{t^d}$ exist. nur für $d > -1$)

Bsp. (2)]

② $\int_1^{+\infty} t^{c-1} e^{-t}\, dt$?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{c-1} e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x \to \infty} x^{c-1} e^{-x/2} = 0$$

453

$\Rightarrow \exists M \geq 0$ s.d. für $x \geq 1$

$$0 \leq x^{c-1} e^{-x} \leq M e^{-x/2}$$

~~definite~~ hat uneig. Integral auf $[1, +\infty[$ (Bsp. (3))

$\xrightarrow{\text{Satz}}$ $\int_1^\infty t^{c-1} e^{-t}\,dt$ existiert für $c \in \mathbb{R}$

1 + 2 $\Rightarrow \Gamma(c)$ existiert für $\underline{c > 0}$.

Satz: $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(c+1) = c\,\Gamma(c)$ für $c > 0$

Kor. $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \in \mathbb{N})$ (z.B. $\Gamma(3) = 2$)

Beweis: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-t}\, dt = 1$ (Bsp. (3) mit $a = 1$)

$$\Gamma(c+1) = \int_0^{+\infty} t^c e^{-t}\, dt$$

$$\Gamma(c) = \int_0^{+\infty} t^{c-1} e^{-t}\, dt$$

Wir benutzen part. Int. für $\int_0^1 + \int_1^\infty$:

$$\int_0^1 t^c e^{-t}\, dt\ ?$$

$$\int_y^1 t^c e^{-t}\, dt = -e^{-1} + e^{-y} y^c + \int_y^1 c t^{c-1} e^{-t}\, dt$$

$$\left(\begin{array}{ll} g_1' = e^{-t}, & g_1 = -e^{-t} \\ g_2 = t^c, & g_2' = c t^{c-1} \end{array} \right)$$

$$\int_y^1 t^c e^{-t}\, dt \xrightarrow[y \to 0]{} -e^{-1} + c \underbrace{\int_0^1 t^{c-1} e^{-t}\, dt}_{\text{existiert}}$$

$$\int_1^{+\infty} t^c e^{-t}\,dt \; ?$$

$$\int_1^x t^c e^{-t}\,dt = -e^{-x} x^c + e^{-1} + c\int_1^x t^{c-1} e^{-t}\,dt$$

$$\int_1^x t^c e^{-t}\,dt \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 + e^{-1} + c\int_1^\infty t^{c-1} e^{-t}\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{+\infty} t^c e^{-t}\,dt = \cancel{-e^{-1}} + \cancel{e^{-1}} + c\int_0^{+\infty} t^{c-1} e^{-t}\,dt$$

d.h. $\boxed{\Gamma(c+1) = c\,\Gamma(c)}$

6.6. Fourier - Reihe

Was sind Fourierreihen?

Anwendungen: Teil von "harmonische Analyse"

↪ Signale ~~z~~ (z.B. Lichtsignale, Tonwellen, ...)
im "Komponenten" zerlegen (z.B. Sonnenstrahlung in Wellen mit bestimmten Energie zerlegen]

Fourier Reihen: periodische Signal, interpretiert als eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

die periodisch ist, z. B.

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ wir versuchen solche f als Summe/Reihe

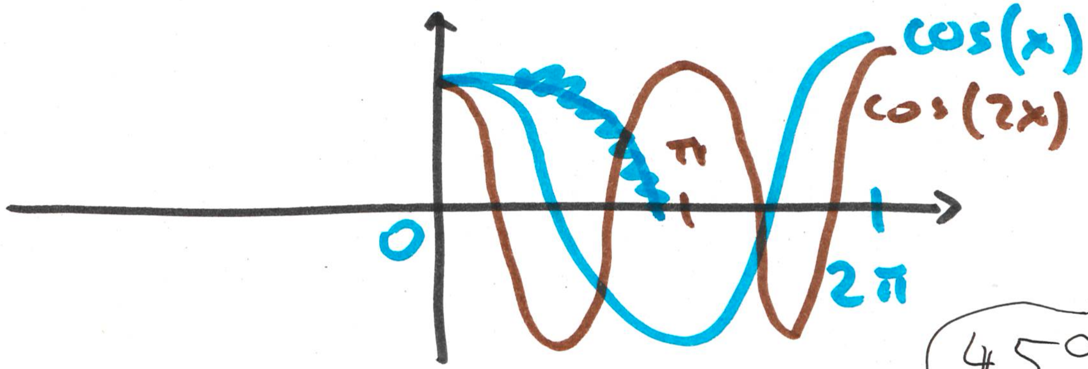
von $\left\{ \begin{matrix} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{matrix} \right.$, $k \in \mathbb{N}_0$ — 2π - periodisch

darzustellen.

d.h.: gibt es Zahlen a_k, b_k mit

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

für $x \in \mathbb{R}$?



__Fourier__ : 19 Jhr

"alle periodische f haben eine Fourierreihe Entwicklung"

__Fragen:__

(1) Hat f 2π - periodisch eine solche Entwicklung?

(2) Wenn __Ja__, wie findet man die Koeffizienten a_k, b_k? Sind sie eindeutig?

Satz 1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, 2π-periodisch, sodass f hat eine Entwicklung

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

die gleich. konvergiert auf $\mathbb{R}$ (oder $[0, 2\pi]$).

Dann ist

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$$

$(k \in \mathbb{N})$

Fourier Koeffizienten

<u>Satz 2:</u> Falls $f \in C^2(\mathbb{R})$ ist 2π-periodisch dann ist

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

wo die Konvergenz ist gleichmässig und

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$$

<u>Bem.</u> Satz 2 gilt <u>nicht</u> für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Beweis von Satz 1:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

$m \in \mathbb{N}_0$

$$f(x)\cos(mx) = a_0 \cos(mx) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx)\cos(mx) + b_k \sin(kx)\cos(mx) \right)$$

(gleich.)

$$\rightsquigarrow \int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_0 \int_0^{2\pi} \cos(mx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(mx)\,dx \right)$$

$\left.\begin{matrix} 0, & m \neq k \\ \pi, & m = k \end{matrix}\right\}$ (Orthogonalität)

(Orthogonalität) $= 0$

$$\rightsquigarrow \quad \int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 2\pi a_0, & m = 0 \\ \pi\, a_m, & m \geq 1 \end{cases}$$

d.h.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \qquad m \geq 1$$

Ähnlicherweise:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \pi\, b_m \qquad (m \in \mathbb{N})$$

Beweis von Satz 2: $f \in C^2(\mathbb{R})$

Schritt 1: die Reihe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

konvergiert gleichmässig (auf $\mathbb{R}$).

Dies folgt aus: es gibt $c \geq 0$ mit

$$|a_k| \leq \frac{c}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$|b_k| \leq \frac{c}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\left(\Rightarrow \sum \underbrace{\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)}_{\left[\leq \frac{2c}{k^2} \text{ für alle } x\right]} \text{ konvergiert normal} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt$$

Part. Int.:
(zweimal)

$$\pi a_k = \underbrace{\left[f(t) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ (periodisch)}} - \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{k} \sin(kt)\, dt$$

$$= -\frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(kt)\, dt$$

$$\rightsquigarrow \quad |a_k| \leq \frac{1}{\pi k^2} \left| \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(kt)\, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} |f''(t)|\, dt$$

d.h. $\leq \frac{c}{k^2}$ mit $c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)|\, dt$

Ähnlicherweise für b_k ...

Schritt 2: die Summe $g(x)$ der Fourier Reihe ist $f(x)$.

"Es kann nichts anders sein!"

Warum?

Sei $\varphi(x) = f(x) - g(x)$

φ ist stetig, 2π-periodisch

Fourier Koeffizienten von φ:

$$a_k(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(kx)\,dx = a_k - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(kx)\,dx \overset{\text{(Satz 1)}}{=} a_k - a_k = 0$$

$(k \in \mathbb{N})$

und $b_k(\varphi) = 0$, $a_0(\varphi) = 0$.

Situation: φ stetig

alle die Fourier Koeff. sind 0

Satz 3: φ muss 0 sein (d.h. $\varphi(x) = 0$ für alle x).

$$\left[\Rightarrow \quad f(x) = g(x)\right]$$

Idee: **Hyp.** $\Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \left(c_0 + \sum_{k=1}^{K} \left(c_k \cos(kt) + d_k \sin(kt)\right)\right) dt = 0$$

für alle c_0, c_k, d_k.

Nehmen wir an, dass $\varphi \neq 0$.

$\Longrightarrow \quad \exists \; x_0 \in [0, 2\pi], \quad \delta > 0, \quad$ mit

$$|\varphi(x)| > 0 \quad , \quad |x - x_0| \leq \delta$$

(Stetigkeit von φ)

Wir können annehmen,

$$\varphi(x) > 1 \quad , \quad |x - x_0| \leq \delta$$

(sonst dividieren wir mit $\frac{1}{\varphi(x_0)}$)

Sei

$$k_n(x) = \left(1 - \cos(\delta) + \cos(x - x_0)\right)^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

① Mit Trig. Formel: k_n ist eine endliche Komb. von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$

2

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, k_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

[<u>Punkt ist</u> : $\quad k_n(x) \geq \left(1 + \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos(\delta)\right)^n > 1$

für $\quad |x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$]