5.4. Globale Eigenschaften der Ableitung

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

f auf I differenzierbar

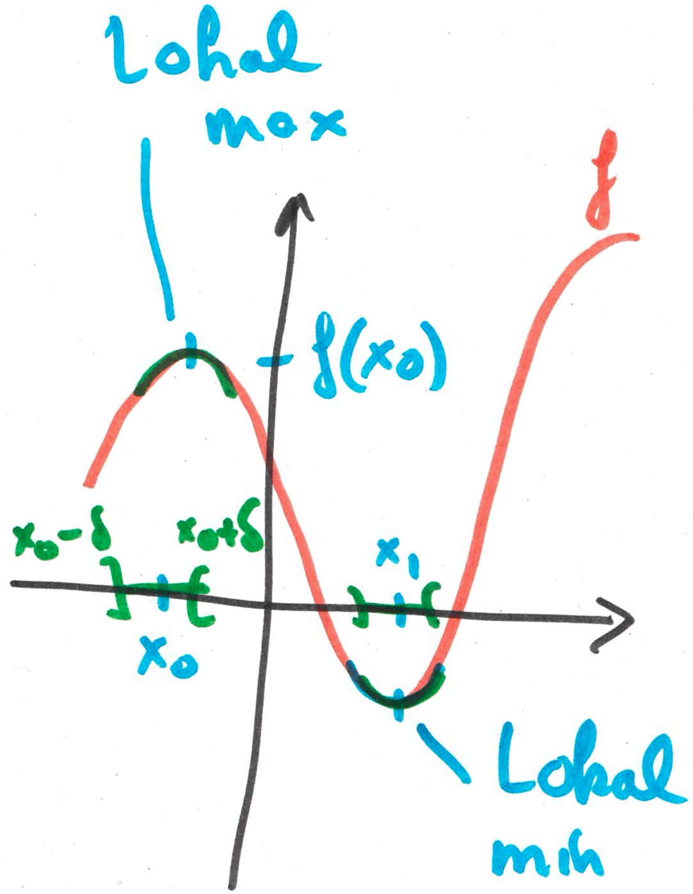
Signum von $f'(x)$ $\rightsquigarrow$ ist f $\begin{cases} \text{wachsend ?} \\ \text{oder} \\ \text{fallend ?} \end{cases}$

$\longrightarrow$ Extremum finden (Min. oder Max)

Def. [Lokalextremum]

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I Intervall

$x_0 \in I$



① x_0 heisst <u>Lokal minimum</u> von f falls es gibt $\delta > 0$ so dass

$$f(x) \geq f(x_0)$$

für $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$.

② x_0 heisst <u>Lokalmaximum</u> falls es gibt $\delta > 0$ so dass

$$f(x) \leq f(x_0)$$

für $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$.

<u>Lokalextremum</u>
$\shortparallel$
Lokal min. oder
Lokal max

__Satz__ (Lokalextremum Satz)

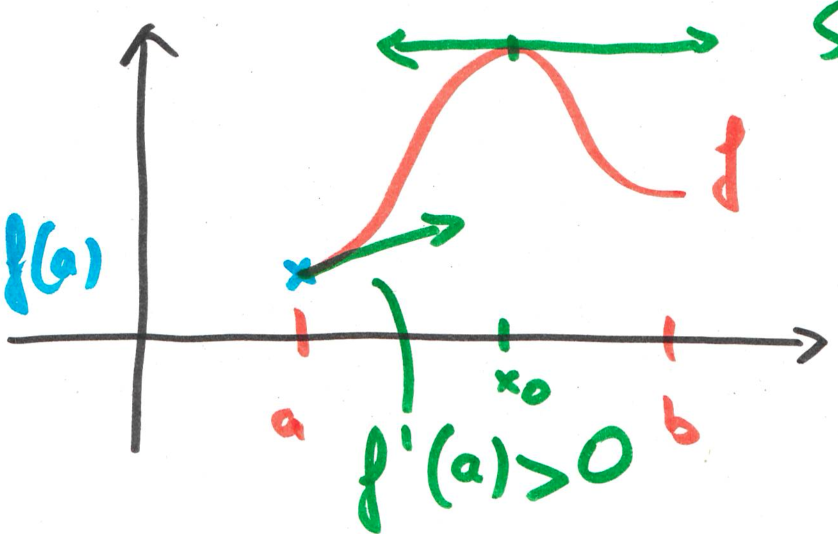
$I \subset \mathbb{R}$, Intervall

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar

Sei $x_0 \in I$ ein __Lokal extremum__, __nicht__ $x_0 = \operatorname{Min} I$ oder $x_0 = \operatorname{Max} I$ (wenn sie existieren)

Dann gilt $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(a)$

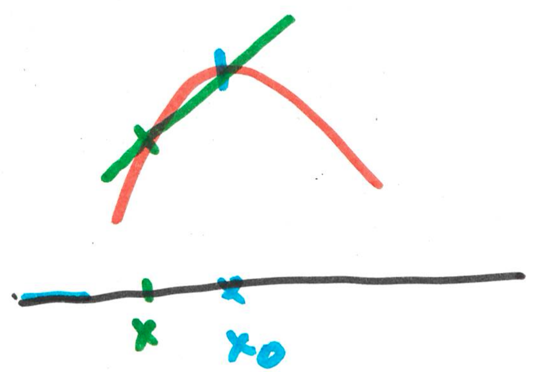


Steigung der Tangente ist 0

$I = [a, b]$

279

Warum ? z. B x_0 Lokalmaximum :



$f(x) \leq f(x_0)$ für $|x - x_0| < \delta$

$\longrightarrow$ für $x < x_0$, $|x - x_0| < \delta$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

für $x > x_0$, $|x - x_0| < \delta$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0$$

Aber $\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} f'(x_0)$

so dass $f'(x_0) \geq 0$ $f'(x_0) \leq 0$

$$\underbrace{f'(x_0) \geq 0 \qquad f'(x_0) \leq 0}_{f'(x_0) = 0}$$

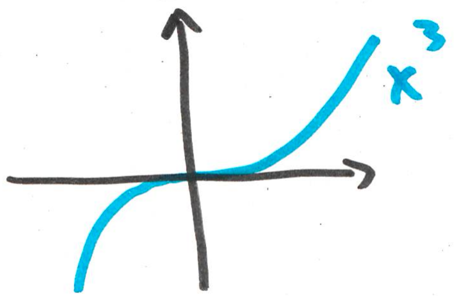
Bemerkungen:

$f'(a) < 0$

① Das gilt <u>nicht</u> für $x_0 = \text{Min}\, I$ oder $x_0 = \text{Max}\, I$ (aber z. B. für $x_0 = \text{Min}(I)$ ein Lokalmax. folgt $f_r'(x_0) = f'(x_0) \leq 0$.)

② Es <u>kann sein</u>, dass <u>$f'(x_0) = 0$</u> (und $x_0 \neq \text{Max}\, I$, $x_0 \neq \text{Min}\, I$) aber x_0 ist kein Lokalextremum.

<u>z. B.</u>



$f(x) = x^3$, $I = \mathbb{R}$

$f'(0) = 0$ aber 0 ist kein Lokalextremum

3 <u>Anwendung:</u> $I = [a, b]$, $a < b$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

f <u>stetig</u> $\Rightarrow$ es gibt x_0, x_1 mit

$$\begin{cases} f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x) \\ f(x_1) = \min\limits_{x \in I} f(x) \end{cases}$$

<u>Methode:</u>

1. Lösen die Gleichung

$$f'(x) = 0, \quad x \in I,$$

sei X die Lösungsmenge

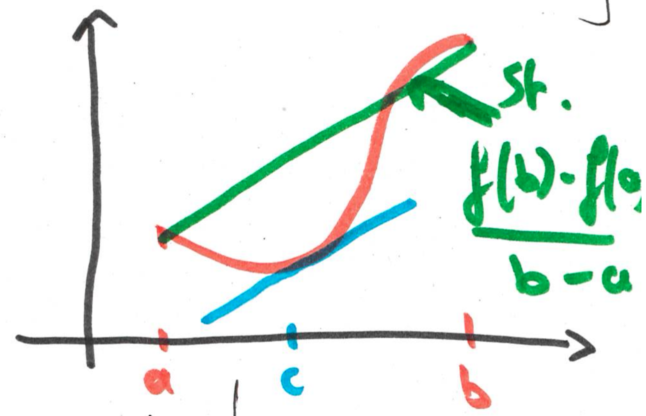
2. Wir berechnen

$$\begin{cases} f(x) & \text{für } x \in X \\ f(a) \\ f(b) \end{cases}$$

und dann ist

$$\max_{x \in I} f(x) = \max\{ f(a), f(b), f(x_0) \text{ für } x_0 \in X \}$$

$$\min_{x \in I} f(x) = \min\{ f(a), f(b), f(x_0), x_0 \in X \}$$



<u>Satz</u>. [Mittelwertsatz]

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$a < b$ in I

Es gibt $c \in \,]a, b[$ mit (mindestens eine)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Kor. 1 $I \subset \mathbb{R}$, Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

(1) f ist $\left(\frac{\text{wachsend}}{\text{fallend}}\right) \iff \left(\begin{array}{ll} f'(x) \geq 0 & \text{für } x \in I \\ f'(x) \leq 0 & \text{für } x \in I \end{array}\right)$

(2) Falls $\left|\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{für alle } x \in I \\ f'(x) < 0 & \text{———— } x \in I \end{array}\right|$ ist

f streng $\left(\begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array}\right)$

Warum? f ist wachsend $\Longrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ für $x \neq x_0$

$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

Falls $f'(x) \geq 0$ auf I und $x < y$ in I

$f'(x) > 0$

284

Mittelwertsatz $\Longrightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) \geq 0$

> 0

$\Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$

$f(x) < f(y)$

<u>z. B.</u> (1) $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x > 0$

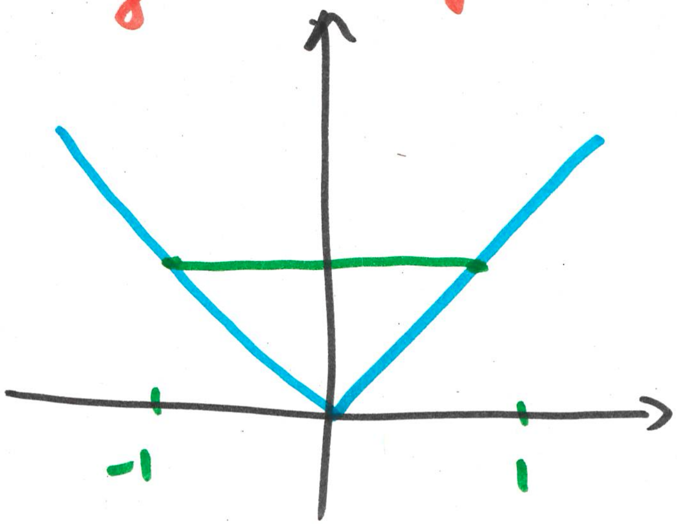
$\longrightarrow$ exp ist streng wachsend auf $\mathbb{R}$

(2) $f(x) = \cos(x)$ auf $[0, \pi]$:

$f'(x) = -\sin(x)$, $\sin(x) > 0$ für $0 < x < \pi$

$\rightsquigarrow$ cos ist auf $]0, \pi[$ <u>streng</u> <u>fallend</u>

Gegenbeispiel



(falls f nicht auf I differenzierbar ist):

$f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$

$a = -1, \quad b = 1$

$\Rightarrow$ Steigung $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

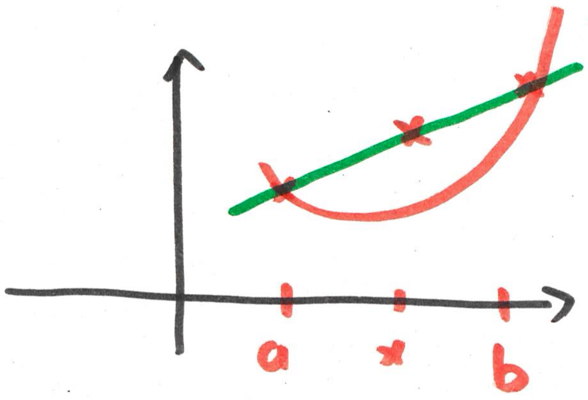
aber $f'(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

und $f'(0)$ existiert nicht

Beweis von Mittelwertsatz

Idee: Lokalextremum benutzen für

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right)$$



$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar

Es gibt ein Minimum / ein Maximum für g

Weiter ist $g(a) = 0 = g(b)$

$\Rightarrow$ falls g nicht immer null ist, ist entweder $\operatorname{Max} g$ <u>oder</u> $\operatorname{Min} g$ nicht 0 (oder $g(x) = 0$ für alle x, in welchem Fall ist $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ für alle x).

Wir nehmen an: $\operatorname{Max} g > 0$; sei x_0 mit $g(x_0) = \operatorname{Max} g(x)$, dann ist $\begin{cases} x_0 \neq a \\ x_0 \neq b. \end{cases}$

<u>Lokalextremumsatz</u>: $g'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Kor. 2 – $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
f differenzierbar
f ist fest auf I $\iff$ $f'(x) = 0$ für all $x \in I$

$$\left[\quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \right]$$

Kor. 3 – ~~[illegible]~~ $I = [a, b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
differenzierbar, mit f' stetig

$$\Rightarrow \quad \boxed{|f(x) - f(y)| \leq M \, |x - y|}$$

mit $M = \underset{x \in [a,b]}{\mathrm{Max}} |f'(x)| \in \mathbb{R}_+$

$$\left[\quad \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| \leq M \right]$$

Beispiele:

(1) **Funktionen studieren:**

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \text{auf } \underbrace{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}_{= I}$$

tan ist differenzierbar auf I (weil $\cos(x) \neq 0$ für $x \in I$ und cos, sin sind diff.)

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cancel{\sin}\, \cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

$$\left[\left(f/g\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}\right] \quad = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad x \in I$$

$\Rightarrow \quad \tan'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad \tan$ ist streng wachsend

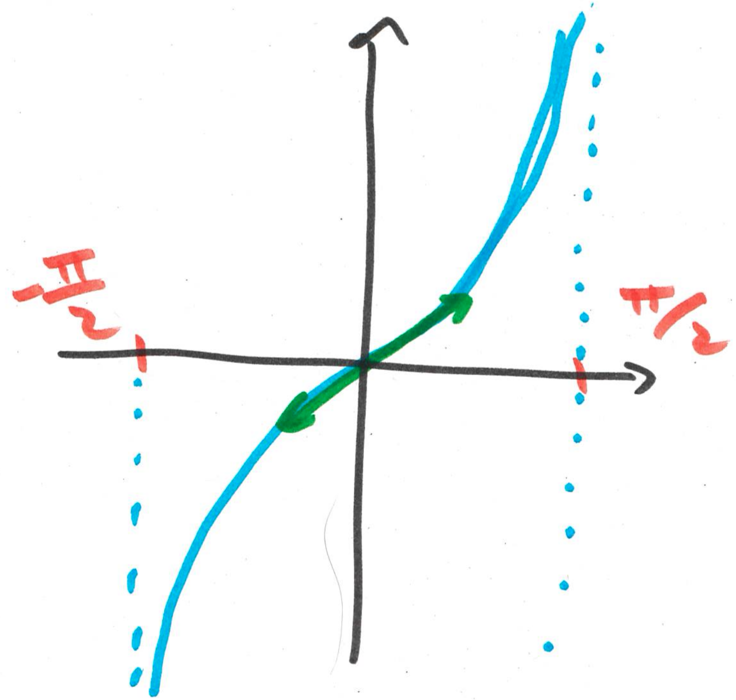
$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$$

Das Bild ist

$\mathbb{R}$

$\tan'(0) = 1$



$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist <u>**bijektiv**</u>

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ist die Umkehrfunktion;

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))}$$

Aber $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)^2} = \dfrac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2}$

$$= 1 + \tan(x)^2$$

$$\Rightarrow \tan'(\arctan(x)) = 1 + \tan(\arctan(x))^2$$

$= 1 + x^2$

$\rightarrow$ $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

(2) <u>Newtonsche Verfahren</u>:

<u>Ziel:</u> Gleichungen

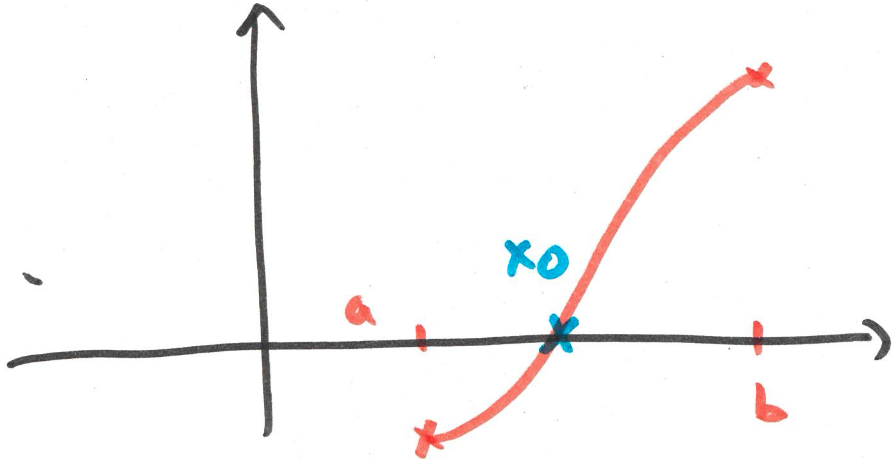
$f(x) = 0$

Lösen.

Hyp. (1) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, diff. ($f'$ stetig)

(2) $f(a) < 0 < f(b)$

(3) f streng wachsend



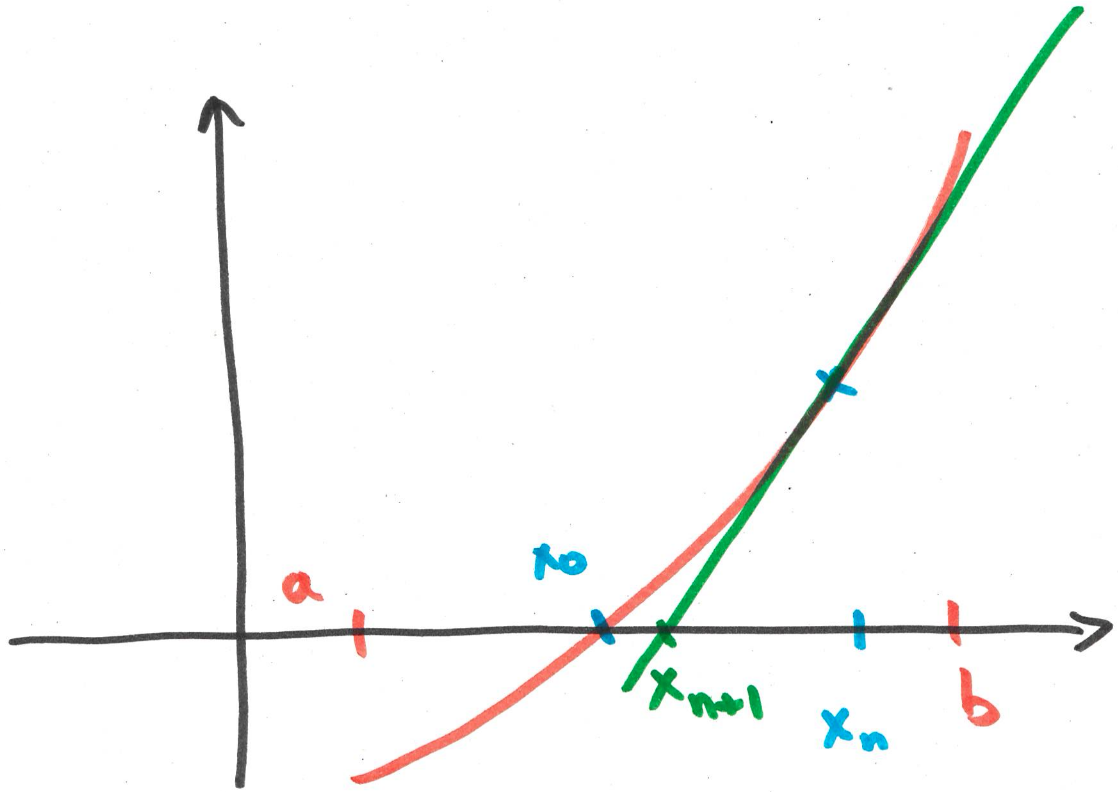
[$\Longrightarrow$ es gibt genau eine Lösung x_0 der Gleichung $f(x_0) = 0$]

<u>Newton:</u> x_0 als Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, wo

$$\begin{cases} x_1 = \text{eine Zahl in } [a,b] \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Falls die Folge <u>konvergiert</u> gegen y, ist

$$y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0.$$



x_{n+1} = die x-Koord. der Durschnitt Punkt zwischen der x-Achse und die Tangente an ~~x~~ x_n