[**Tangente:**

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Durschnitt mit x - Koord. Achse:

$$y = 0 \iff -f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

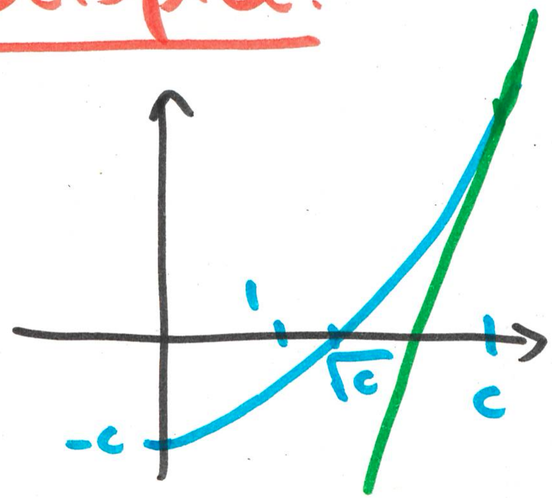
$$\iff x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$]

Beispiel:

$$f(x) = x^2 - c, \quad c > 1$$

$[a = 0, b = c]$

$$f(x) = 0 \iff x = \sqrt{c}$$



__Newton:__

$$x_1 = c$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n}$$

[2.8.5]

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

(x_n) konvergiert __sehr schnell__ gegen $\sqrt{c}$ ($\approx$ Anzahl der richtigen Ziffern durch ~~≢~~ 2 jedes mal multipliziert)

5.5. Höhere Ableitungen

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ I Intervall

f differenzierbar $\longrightarrow$ $f': I \longrightarrow \mathbb{R}$

Def. $k \in \mathbb{N}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

Die k-te Ableitung $f^{(k)}$ ist definiert durch:

$f^{(1)} = f'$ falls f differenzierbar ist.

und $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ falls $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist

Notation: $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$

Bemerkungen: (1) falls $f^{(k)}$ existiert, dann ist

$$(f^{(a)})^{(b)} = f^{(a+b)} \quad \text{für } a+b \leq k$$

(2) Manchmal definiert man

$$f^{(0)} = f$$

(3) Wenn f, g haben k Ableitungen und a, b sind in $\mathbb{R}$, ist $af + bg$ auch k-mal ~~…~~ differenzierbar und

$$(af + bg)^{(k)} = a f^{(k)} + b g^{(k)}$$

Def. I Intervall in $\mathbb{R}$

$k \in \mathbb{N}$

$C^k(I) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ ist k-mal differenzierbar <u>und</u> $f^{(k)}$ ist <u>stetig</u> $\}$

$C^\infty(I) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^k(I)$ für alle $k \in \mathbb{N} \}$

$C^0(I) = C(I) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ stetig $\}$

<u>Bemerkungen:</u>

(1) $C^k(I) \subset C^{k-1}(I)$

(2) $C^k(I)$, $C^\infty(I)$, $C^0(I)$ sind Vektorräumen über $\mathbb{R}$

Beispiel [5.5.5]

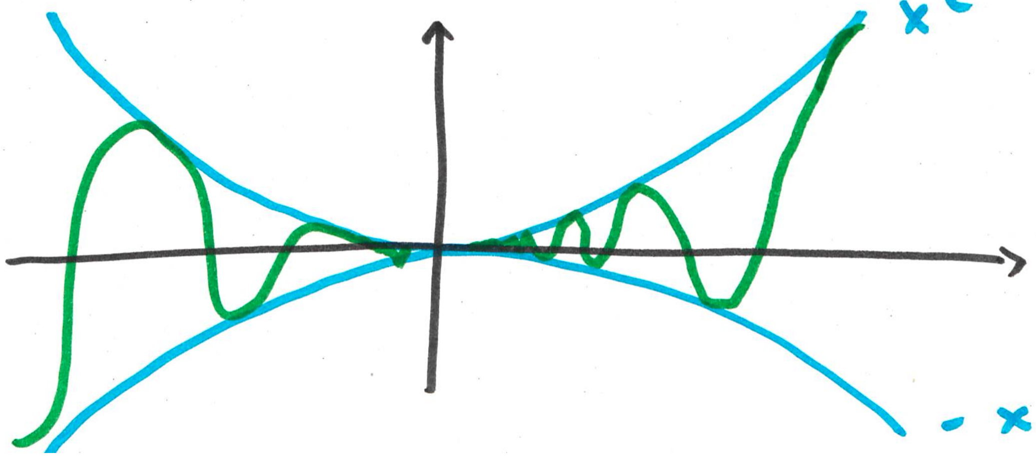
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die diff. ist aber nicht in $C^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$

Man überprüft $f'(0) = 0$

aber

$f'(x)$, $x > 0$, hat kein Grenzwert.



Satz (Leibnizsche Formel) [5.5.6]

$k \in \mathbb{N}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, k-mal differenzierbar; dann ist fg auch k-mal differenzierbar und

$$(fg)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)g(x) + k f^{(k-1)}(x) g'(x) + \binom{k}{2} f^{(k-2)}(x) g^{(2)}(x) + \dots + \binom{k}{j} f^{(k-j)}(x) g^{(j)}(x) + \dots + f(x) g^{(k)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)}(x) g^{(j)}(x)$$

$\underline{k=1}$: $(fg)' = f'g + fg'$

$\underline{k=2}$: $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

(z.B.

$$
\begin{aligned}
(fg)'' &= ((fg)')' \\
&= (f'g + fg')' \\
&= (f''g + \underline{f'g'}) + (\underline{f'g'} + fg'') \\
&= f''g + 2f'g' + fg''
\end{aligned}
$$

)

Beispiele:

(1) Alle Polynome $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sind in $C^\infty(\mathbb{R})$; alle $f^{(k)}$ sind auch Polynome.

Differentialgleichungen

(2) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $C^\infty(\mathbb{R})$

und $\exp^{(k)} = \exp$, für $k \in \mathbb{N}$.

(3) $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

sind in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos$$

$$\boxed{\cos'' = -\cos \qquad \sin^{(2)} = -\sin}$$

$$\cos^{(3)} = \sin \qquad \sin^{(3)} = -\cos$$

$$\cos^{(4)} = \cos \qquad \sin^{(4)} = \sin$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

(4) $\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $C^\infty(]0,+\infty[)$

$\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\log'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, ... $\cancel{\log^{(k)}(x)}$

$$\log^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$$

(5) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, $I =]0, +\infty[$

ist in $C^\infty(I) = C^\infty(]0, +\infty[)$

und $f'(x) = a\,x^{a-1}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = a\,(a-1) \cdots (a-k+1)\, x^{a-k}$

(6) arcsin und arccos sind in $C^\infty(]-1, 1[)$

$\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

sind unendlich vielmal differenzierbar als Verknüpfungen von C^∞ Funktionen

[z. B. $\dfrac{1}{\sqrt{y}} \circ (1-x^2)$]

Satz. [5.5.8]

Falls $\sum a_n x^n$ hat $R > 0$ als Konv. Radius, ist die Summe $f \in C^\infty(]-R,R[)$ [$C^\infty(\mathbb{R})$ falls $R = +\infty$]

und

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)\, a_{n+k}\, x^n$$

$(k \in \mathbb{N})$

[z.B. $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$]

Insbesondere: $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$

$$\iff \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

($\Rightarrow$ die Koeff. (a_n) sind durch f bestimmt).

Sonderfall: f Polynom von Grad $k \in \mathbb{N}_0$.

f ist eine Potenzreihe mit $a_n = 0$ für $n \geq k+1$.

$$\Rightarrow \quad f^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{k-j} (n+1) \cdots (n+j)\, a_{n+j}\, x^n$$

D.h.:

$$f^{(k)}(x) = \text{konstante}_{(\neq 0)} \text{ Funktion} = k!\, a_k$$

$$f^{(j)}(x) = 0 \quad \text{für } j \geq k+1$$

Beispiel: **Ungleichungen**

für $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$

$$f(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right); \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Ziel: $f(x) \geq 0$; $f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = -\sin(x) + x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) + 1$$

$\Rightarrow \quad f^{(3)}(x) \geq 0$

$\Rightarrow \quad f^{(2)}$ ist wachsend so

$f^{(2)}(x) \geq f^{(2)}(0)$ für $x \geq 0$

$= 0$

$\Rightarrow \quad f'$ ist wachsend so

$f'(x) \geq f'(0) = 0$ für $x \geq 0$

$\Rightarrow \quad f$ wachsend so

$f(x) \geq f(0) = 0$ für $x \geq 0$

$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$

310

5.6 – Konvexe Funktionen

Def. (1) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$

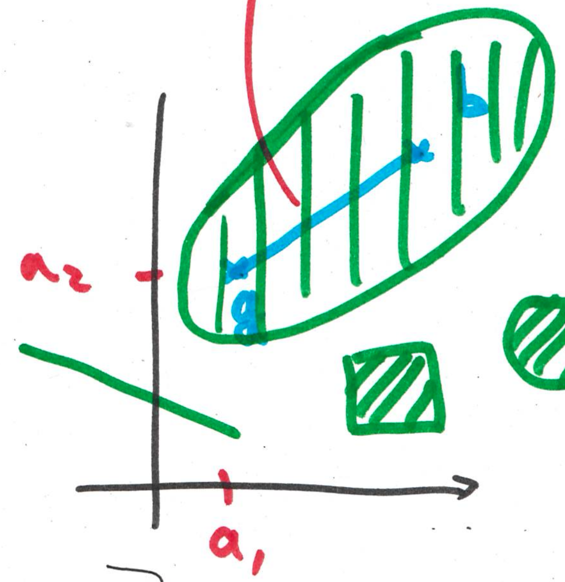
heisst **konvex** falls:

für alle $a \neq b$ in A,

die Strecke zwischen a und b ist in A enthaltet

[d.h. für alle a und b in A und $t \in [0,1]$, $ta + (1-t)b \in A$]

Die Strecke ist die Menge $ta + (1-t)b$, $t \in [0,1]$



$t(a_1, a_2) + (1-t)(b_1, b_2)$
$= (ta_1 + (1-t)b_1, ta_2 + (1-t)b_2)$

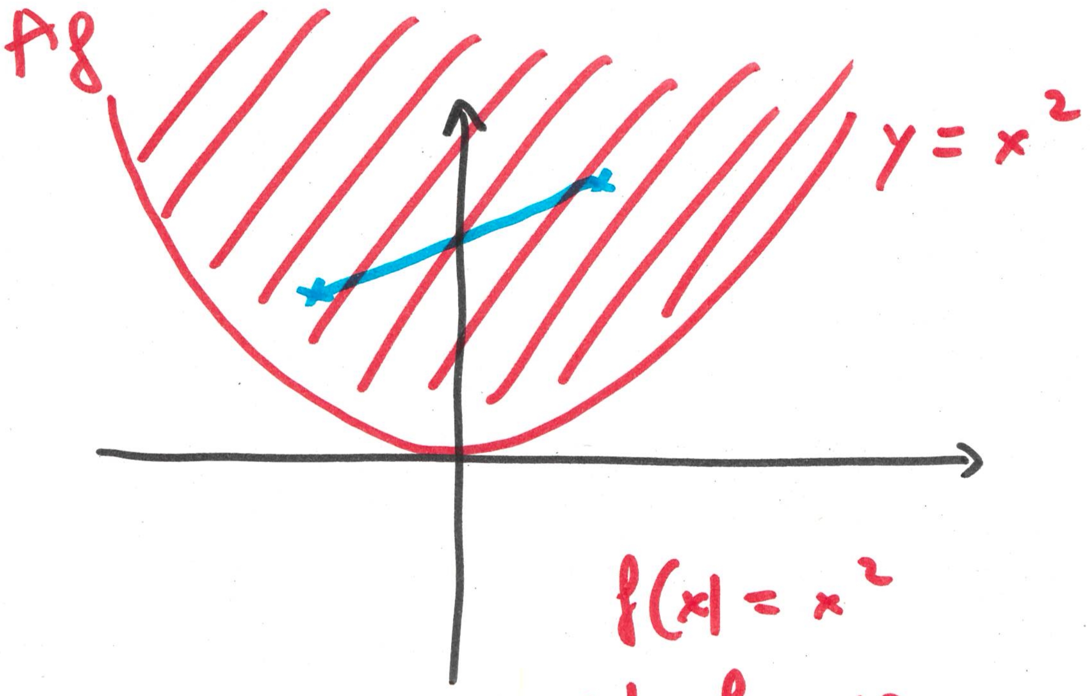
(2) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst <u>konvexe Funktion</u>

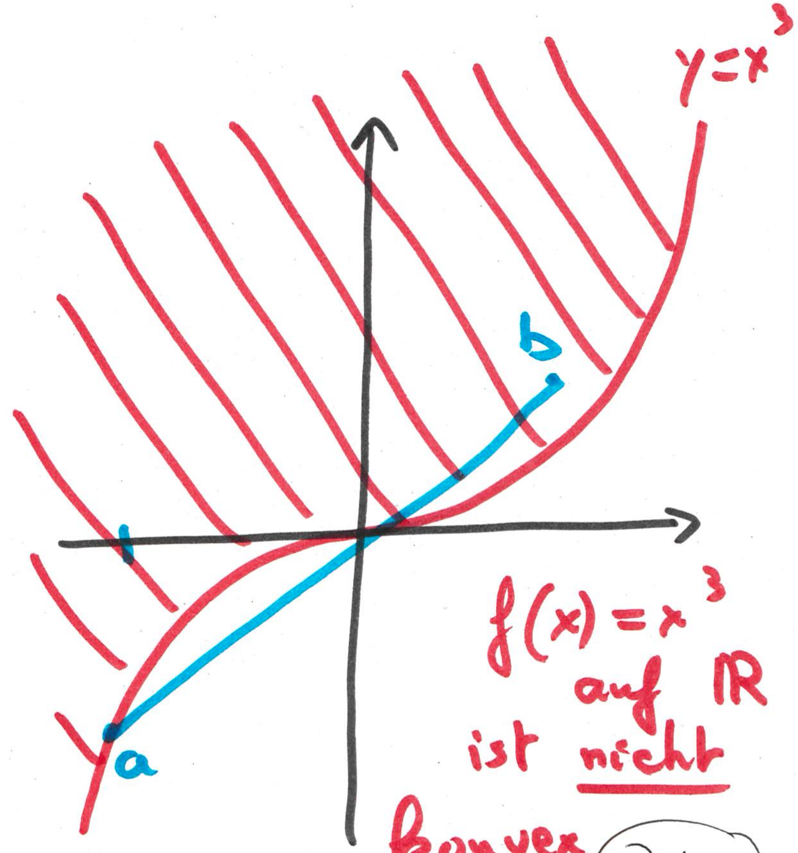
falls die Menge

$$A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$$

ist <u>konvex</u>.



$f(x) = x^2$ ist konvex



$f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> konvex