exponential, trigo. Funktionen, Wurzeln, ..., sind **alle** stetig

$\longrightarrow$ z. B.

$$f(x) = \exp\Big(\sin\big(\cos(\exp(\underbrace{3x^2+1}_{\text{Pol.}}))\big)\Big)$$

Pol. $\Downarrow$ stetig

Verknüpfung mit exp $\Rightarrow$ stetig

mit cos

sin

exp

alles is stetig

(2) Es gibt Funktionen (3.2.3, (3))

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

die an <u>keine</u> Stelle x_0 stetig sind.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \quad [f(\tfrac{1}{\sqrt{2}})=0] \\ b, & x = \frac{a}{b} \text{ wo } a \geq 0,\ b \geq 1 \text{ ohne gemeinsam Faktor} \end{cases}$$

$[f(0) = 1,\ f(\tfrac{1}{2}) = 2,\ f(\tfrac{3}{5}) = 5, \ldots]$

An <u>keine x_0</u> ist f stetig.

Wie überprüft man Stetigkeit?

(1) Summe / Produkt / Verknüpfung von Funktionen die stetig sind

(2) <u>Vergleichung</u>:

Falls $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$, g stetig auf I

<u>und</u> (*) $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$ für alle x, y in I

dann ist f auch stetig auf I.

<u>Sonderfall</u>: $g(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}_+$, falls f (*) erfüllt [d.h. $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$]

ist f <u>Lipschitz-stetig</u>.

[z.B. $f(x) = |x|$, auf $I = \mathbb{R}$

ist Lipschitz-stetig:

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y|$$

Dreiecksungleichung

(Verknüpfung) für jede stetige $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$|g|$ auch stetig]

③ Satz [3.2.10] $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$

$x_0 \in I$

(f stetig an x_0) $\iff$ (für jede (a_n) in I s.d. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$,

gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$).

z.B.

(1) $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig

fg stetig?

$x_0 \in I$; sei $a_n \in I$ s.d. $a_n \longrightarrow x_0$

dann gilt $f(a_n) \longrightarrow f(x_0)$ [f stetig]

$g(a_n) \longrightarrow g(x_0)$ [g "]

(Folgen) $\Longrightarrow$ $f(a_n)g(a_n) \longrightarrow f(x_0)g(x_0)$

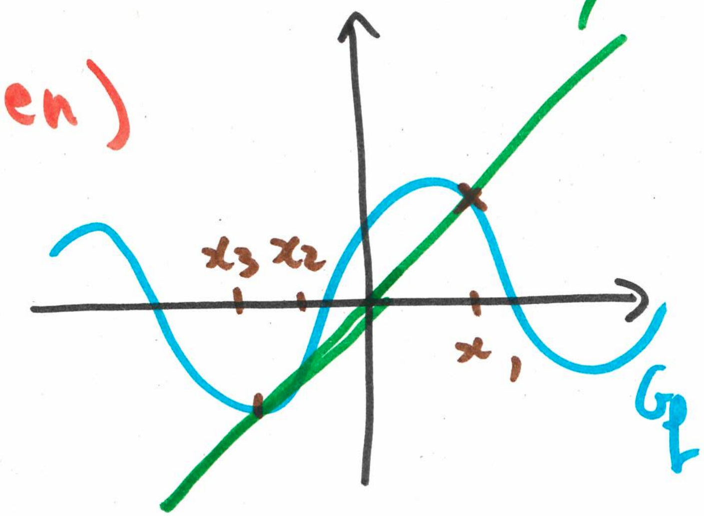
$\quad\quad \shortparallel$

$(fg)(a_n) \longrightarrow (fg)(x_0)$

[Nicht für Häufungspunkte!]

(2) Sei (a_n) mit

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{R} \text{ (gegeben)} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$



wo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Falls f stetig auf $\mathbb{R}$ ist, und falls (a_n) konvergiert, ist den~~n~~ Grenzwert x eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$.

[Warum?

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ x & = & f(x) \end{array}$$

[f stetig]]

3.3 - "Globale" Eigenschaften von stetige Funktionen

1. Zwischenwertsatz
2. Extremumsatz

} hängen auch von I ab

$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

Def. $I = [a, b]$ heisst **kompakt Intervall** $(a \leq b)$

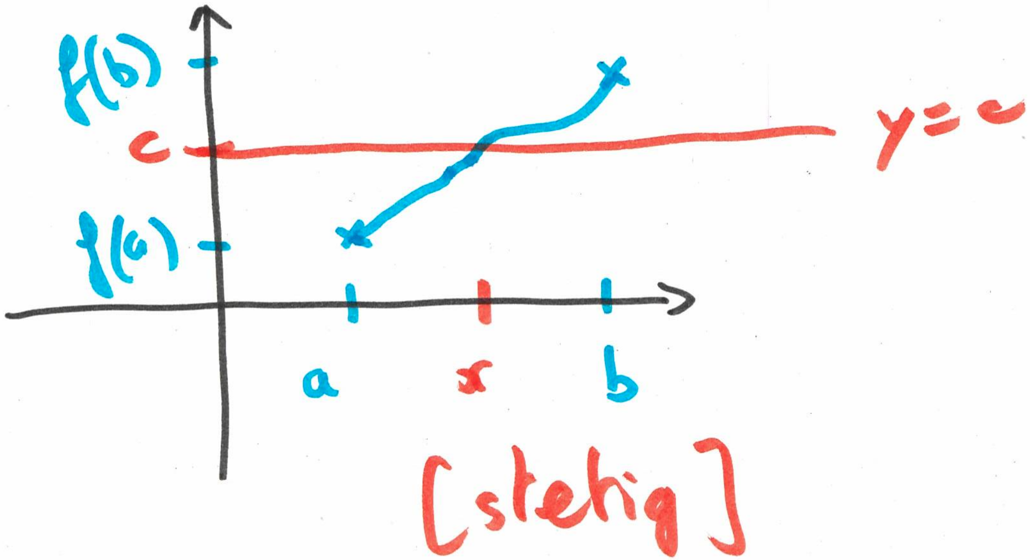
(3.3.1)

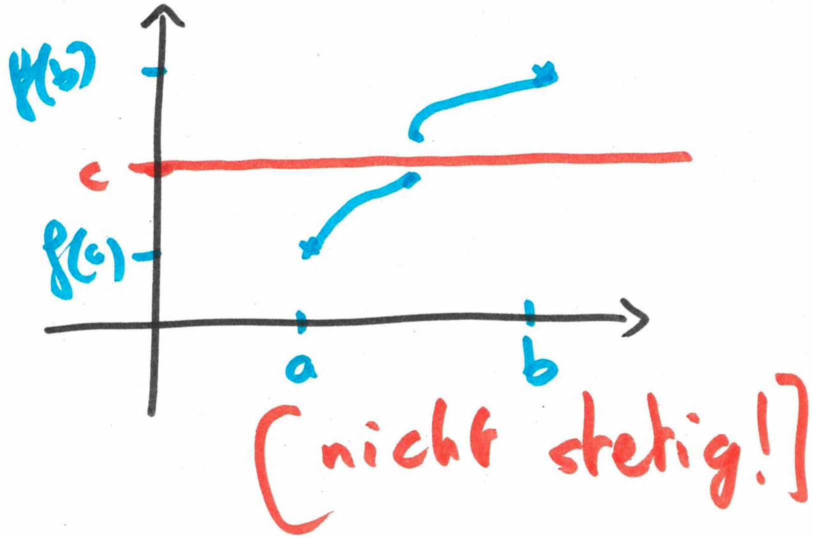
Satz - [Zwischenwertsatz]

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**

Falls $f(a) < f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$), für alle $c \in [f(a), f(b)]$, gibt es (mindestens) $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.

(bzw. für $c \in [f(b), f(a)]$, gibt es $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$).

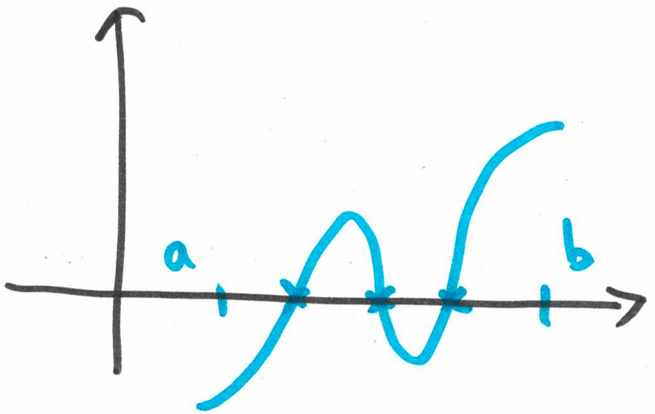




<u>Sonderfall:</u>

$$f(a) < 0 < f(b)$$

$\Longrightarrow$ es gibt eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b.



Korollar: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ das Bild von f ist ein Intervall

d.h. $f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \} \subset \mathbb{R}$

(weil für $a < b$ in I, ist das Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ in $f(I)$ wegen den Zwischenwertsatz).

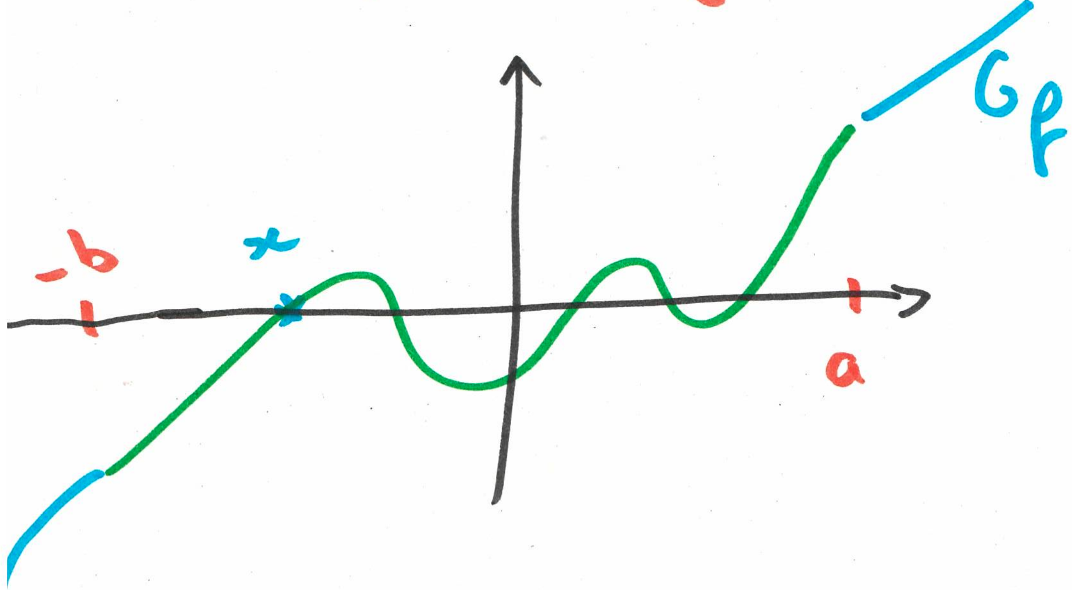
<u>z.B.</u> Sei $k \in \mathbb{N}$, <u>ungerade</u>

$a_k, \ldots, a_1, a_0$ reellen Zahlen, $a_k \neq 0$

Die Gleichung

$$f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

hat (mindestens) eine reelle Lösung.



$(a_k > 0)$

Weil: im Fall $a_k > 0$, gibt es $a \in \mathbb{N}$, $f(a) > 0$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $f(-b) < 0$

$\Rightarrow$ (Zwischenwertsatz + Stetigkeit von Pol.) es gibt mindestens ein $x \in [-b, a]$ mit $f(x) = 0$.

(Warum?

① $\lim\limits_{n\to\infty} (a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0) = +\infty$

$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{N}$ mit $a_k a^k + \dots + a_1 a + a_0 > 0$

② $\lim\limits_{n\to\infty} (a_k (-n)^k + \dots + a_1(-n) + a_0)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (-a_k n^k + \dots - a_1 n + a_0)$

$= -\infty$

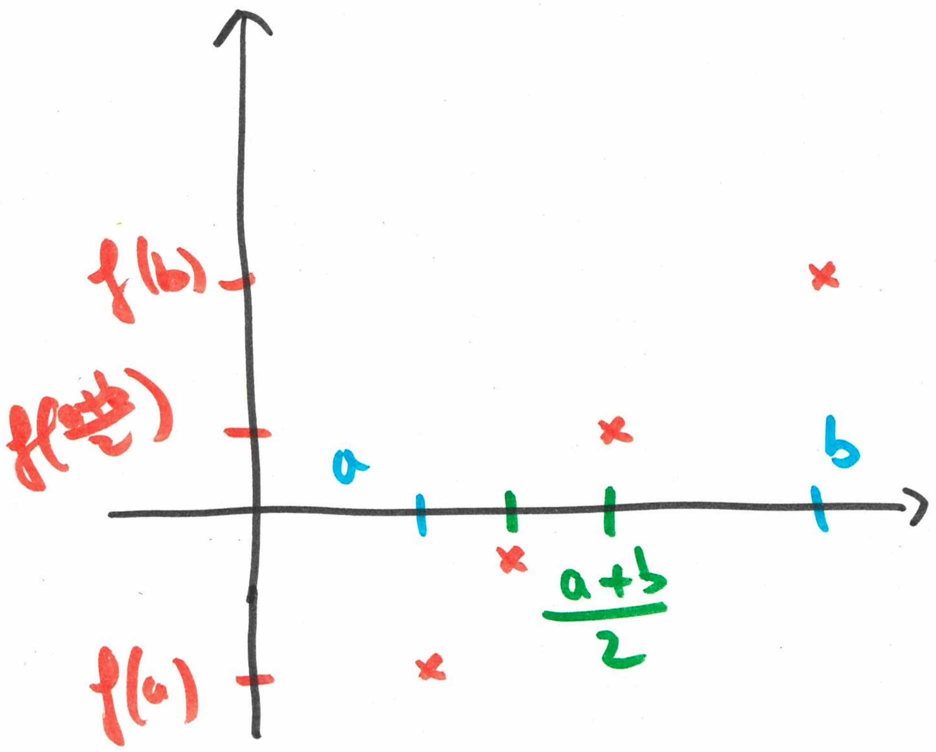
weil k ungerade ist!

)

177

Beweis vom Zwischenwertsatz

$$f(a) < 0 < f(b)$$



<u>Idee:</u> Intervall in zwei ~~Teilen~~ kleinere Int. teilen; eine muss die Lösung enthalten

. . .

Wir konstruieren Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}_0$

mit

$$\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \\ b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \\ f(a_n) < 0, \quad f(b_n) \geq 0 \end{cases}$$

$I_0 = [a, b]$

Wenn I_n definiert ist, wählen wir

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{falls } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right], & \text{falls } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Dann folgt

(a_n) wachsend + beschränkt $\Rightarrow a_n \to x_0$

(b_n) fallend + " $\Rightarrow b_n \to x_1$

und $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

sodass $x_0 = x_1$.

Stetigkeit von f

Es gilt $\left\{ \begin{array}{l} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) \leq 0 \\ f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_0) = f(x_1) = 0.$

179

Satz (Extremumsatz, 3.3.2)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann hat $f([a,b]) = \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$

ein Maximum und ein Minimum,

d.h. es gibt $\underbrace{x_0}_{\text{(mindestens)}} \in [a,b]$, $x_1 \in [a,b]$

mit

für $x \in [a,b]$, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$