Wichtig!

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$g : X' \longrightarrow Y'$$

Wann sind $f = g$? Nur wenn

$$X = X', \quad Y = Y'$$

und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Bsp.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$$

Nicht gleich, obwohl die "Formel" ist dieselbe!

Die Gleichung

$$g(x) = 2$$

hat eine Lösung. $(\sqrt{2})$

Aber die Gleichung

$$f(x) = 2$$

hat keine.

Surjektive / Injektive / Bijektive

Abbildungen

Die folgenden Fragen sind für alle mögliche Gleichungen wichtig:

$f: X \longrightarrow Y$

(1) Gibt es für alle $y \in Y$ <u>mindestens eine</u> Lösung x der Gleichung

$$f(x) = y \quad ?$$

[f ist <u>surjektiv</u>]

(2) Gibt es für alle $y \in Y$ <u>höchstens</u> eine Lösung?

[f ist <u>injektiv</u>]

(3) Gibt es für alle $y \in Y$ <u>genau eine</u> Lösung?

[f ist <u>bijektiv</u>]

(3) = (1) $\wedge$ (2)

und

"Standard" Beispiele:

① Surjektive Abbildung

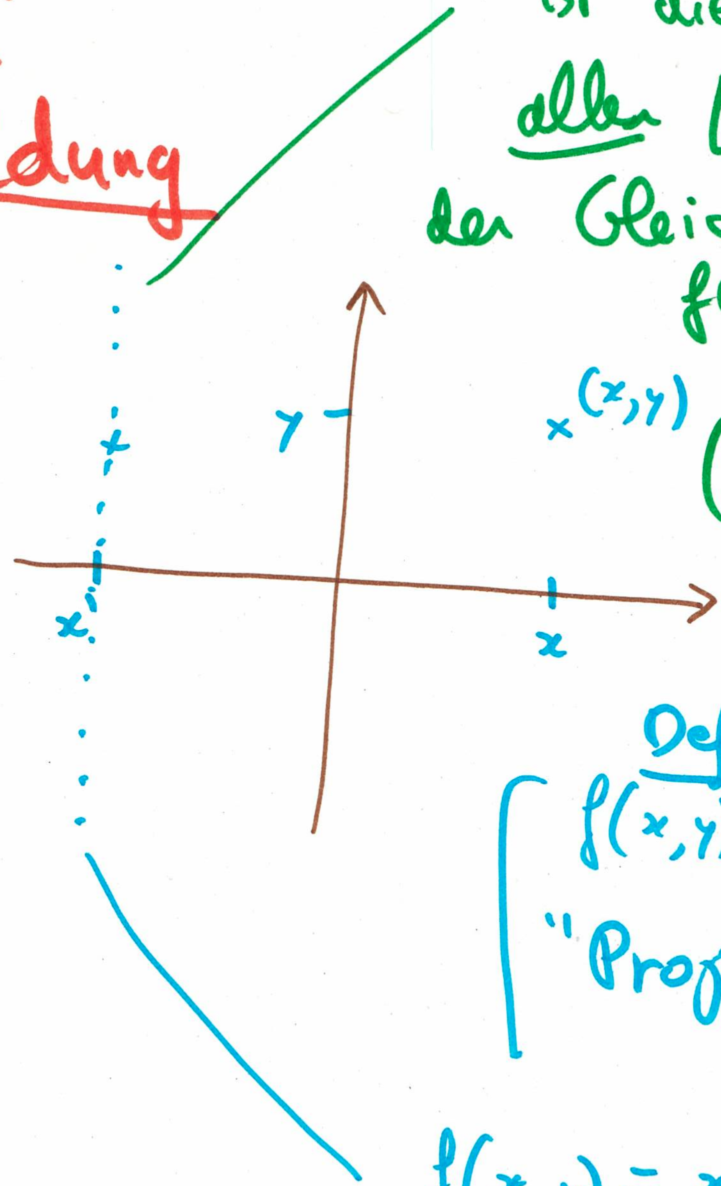
A Menge, $\neq \emptyset$

Y "

$f: A \times Y \longrightarrow Y$

$f(a, y) = y$

ist <u>surjektiv</u>: für alle $y \in Y$, sei $a \in A$ frei gewählt; $f(a, y) = y$



die Gerade ist die Menge <u>aller</u> Lösungen der Gleichung
$f(P) = x'$
(Punkt in der Ebene)

<u>Def</u>

$f(x, y) = x$

"Projektion"

$f(x, y) = x'$

② Injektive Abbildung

X Menge, Teilmenge von Y

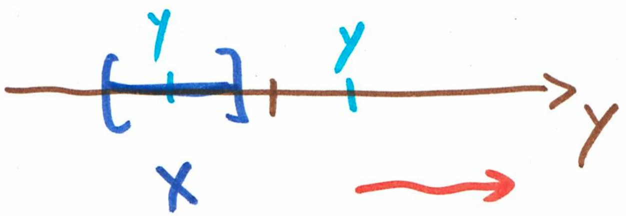
Sei $f : X \longrightarrow Y$ $\quad$ [$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$,

mit $f(x) = x$ $\quad$ $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \ldots$]

("Inklusionsabbildung")

f ist <u>injektiv</u>: $\quad y \in Y$

$f(x) = y \iff x = y$



$\longrightarrow$ nur eine mögliche Lösung, aber falls $y \notin X$, keine.

3 Bijektive Abbildung

$$X = Y$$

$$f(x) = x$$

"Identitätsabbildung von X",

bezeichnet Id_X

Beispiele:

inj. / nicht surj.

(1) $s_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad s_1(n) = n^2$

$s_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ — ① nicht inj, nicht surj.

$s_3 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$s_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Big\}$ nicht inj, nicht surj.

$s_5 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$) nicht inj, surjektiv $\quad s_5(n) = n^2$

① $(-1)^2 = 1^2$ d.h. $s_2(-1) = s_2(1) = 1$

[die Gleichung $s_2(n) = 1$ hat mindestens 2 Lösungen]

($\Rightarrow$ s_3, s_4, s_5 sind nicht injektiv)

Warum sind s_1, s_2, s_3, s_4 nicht surjektiv?

<u>s_1</u>: die Gleichung

$$n^2 = 2$$

mit Unbekannte $n \in \mathbb{N}$ hat <u>keine</u> Lösung

<u>s_2</u>: die Gleichung $n^2 = 2$ mit $n \in \mathbb{Z}$ hat keine Lösung

<u>s_3</u>: " [$\sqrt{2}$ ist nicht in $\mathbb{Q}$]

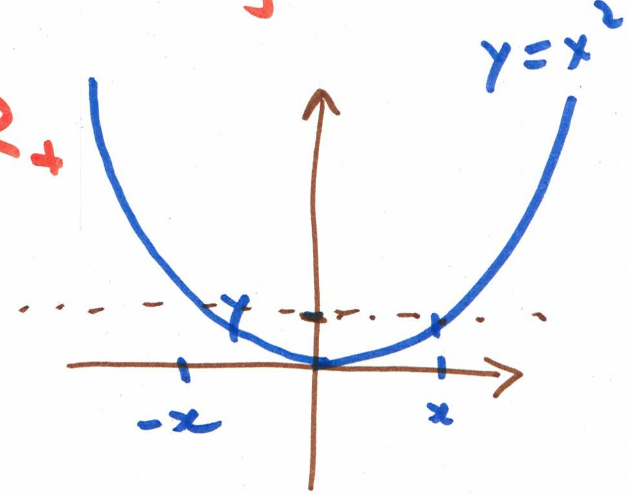
<u>s_4</u>: die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow s_4$ nicht surj.

(2) Sei $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$

und

$$s_6 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $s_6(x) = x^2$



s_6 ist **bijektiv**

[weil ① für alle $x \geq 0$,

(surj.) existiert $\sqrt{x} \geq 0$ mit $s_6(\sqrt{x}) = x$

② für alle $y \geq 0$, die

(inj.) Gleichung $x^2 = y$ hat nur eine Lösung die ≥ 0 ist.

(3) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$f(a,b,c) = 2^a 3^b 5^c$$

$[f(1,1,1) = 2.3.5 = 30]$

f ist <u>injektiv</u>: seien (a,b,c), (a',b',c')

mit

$$f(a,b,c) = f(a',b',c')$$

Wir versuchen zu beweisen, dass

$$(a,b,c) = (a',b',c').$$

Aber $2^a 3^b 5^c = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'}$

gilt nur falls $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$

31

f ist nicht surjektiv:

z. B. $f(a, b, c) = 1$ hat keine Lösung.

Verknüpfung oder Zusammensetzung

Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

Die Verknüpfung $g \circ f$ ist die Abbildung

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

so dass x ist auf $\boxed{g(f(x))}$ abgebildet

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

Wir können:

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{h} W \,, \text{ d.h. } h \circ (g \circ f)$$

oder

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h \circ g} W \,, \text{ d.h. } (h \circ g) \circ f$$

die gleich sind:

x auf $h(g(f(x)))$ abgebildet.

Bsp.

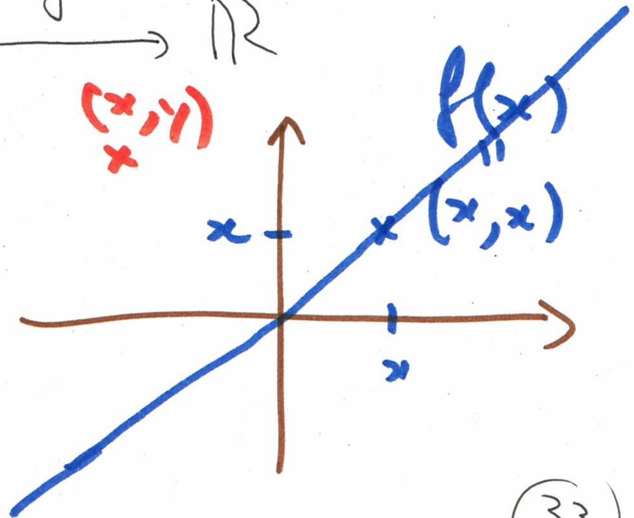
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x, x)$$

$$g(x, y) = xy$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x, x) = x^2$$



Umkehrabbildung einer bijektive Abbildung

Allgemein

$X \xrightarrow{f} Y$ bijektiv

Für alle $y \in Y$, gibt es genau eine $x \in X$ mit

$$f(x) = y.$$

Dies definiert eine Abbildung

$$Y \longrightarrow X$$

wo y ist auf x abgebildet, bezeichnet $\boxed{f^{-1}}$, die "Umkehrabbildung" von f.

Bsp.

$$s_6 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$s_6(x) = x^2$$

Die Quadratwurzeln ist ~~die~~ die Abbildung

$$q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$q(x) = \sqrt{x}$$

mit $s_6(q(x)) = x$

und $q(s_6(x)) = x$

Es gilt:

$f^{-1}(f(x)) = x$, für alle x

$f(f^{-1}(y)) = y$, für alle y

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$$