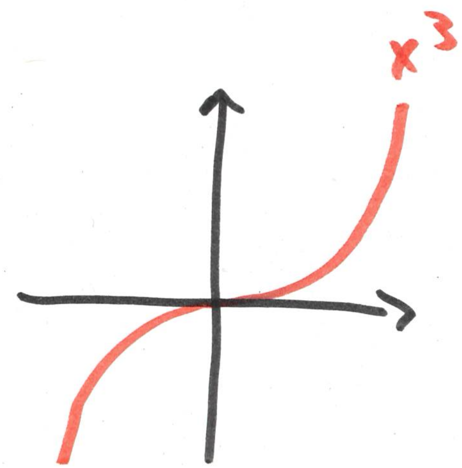
Frage: ist x^3 konvex?

Hängt vom Wahl des Intervalls I ab!

$f(x) = x^3$ für $x \in I$



$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$\Rightarrow$ x^3 ist auf $\mathbb{R}_+$ <u>konvex</u>

aber nicht auf ein Intervall I das ein negative Zahl enthaltet

Satz – (5.6.2) $I \subset \mathbb{R}$

(1) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **konvex**

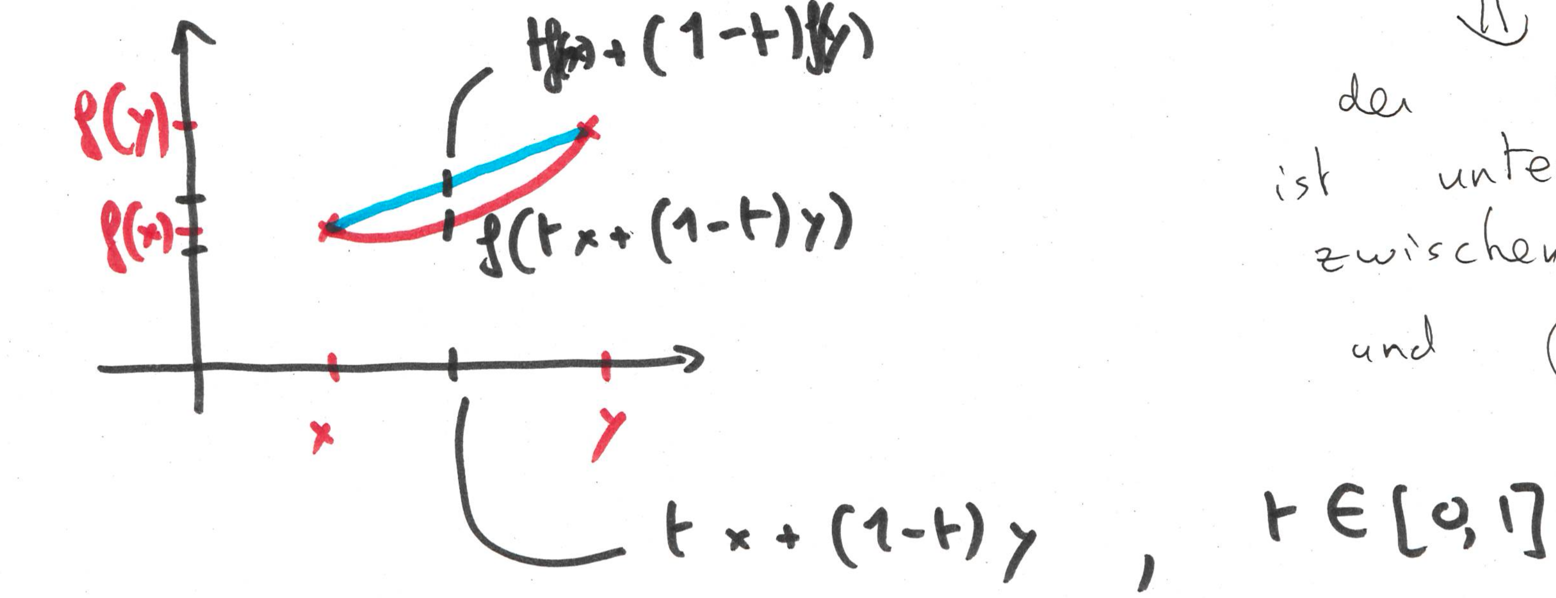
$\Updownarrow$

für alle $x \neq y$ in I, und $t \in [0,1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

$\Updownarrow$

der Graph von f ist unten die Strecke zwischen $(x, f(x))$, und $(y, f(y))$



(2) Wenn $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex ist, gilt:

für $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ in } I, & (x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j) \\ p_1, \ldots, p_n \text{ in } [0,1], & \text{mit } \boxed{p_1 + \cdots + p_n = 1} \end{cases}$

ist (*) $f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n)$

[z.B. $n = 2$:

$x_1 \neq x_2$

$p_1 + p_2 = 1$

sei $t = p_1$, $1 - t = p_2$

(*) bedeutet

$f(t x_1 + (1-t) x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$]

Satz. [5.6.4]

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Falls $f \in C^2(I)$ [f, f', f'' existieren auf I und sind stetig]

dann ist f <u>konvex</u> $\iff f''(x) \geq 0$ für $x \in I$

$\iff f'$ ist auf I wachsend.

z.B. (1) $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$ ist konvex

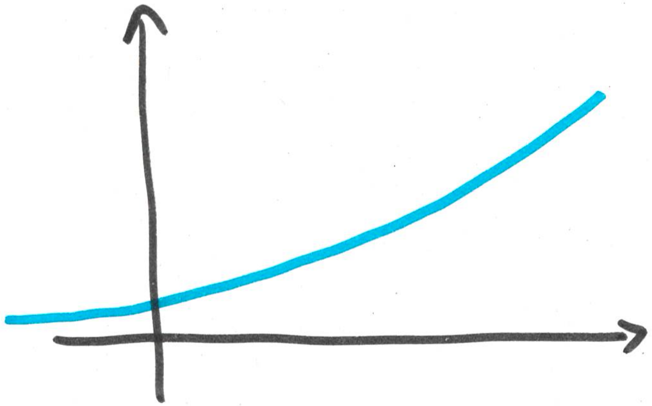
$(f'' = e^x \geq 0)$

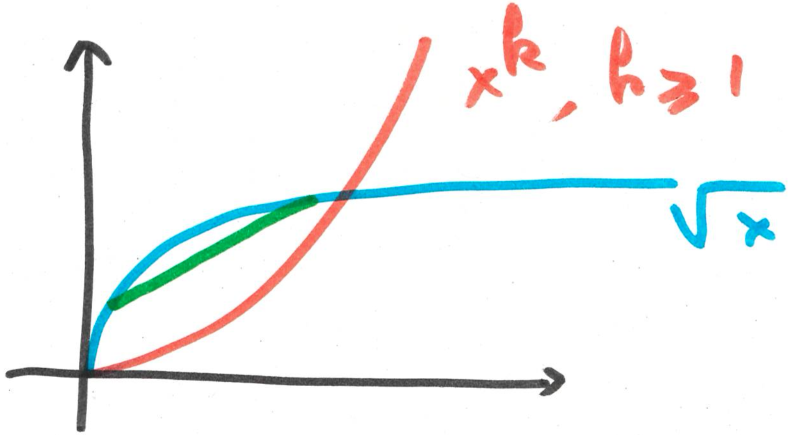
(2) $f(x) = x^k$ auf $\mathbb{R}^+$ ist konvex

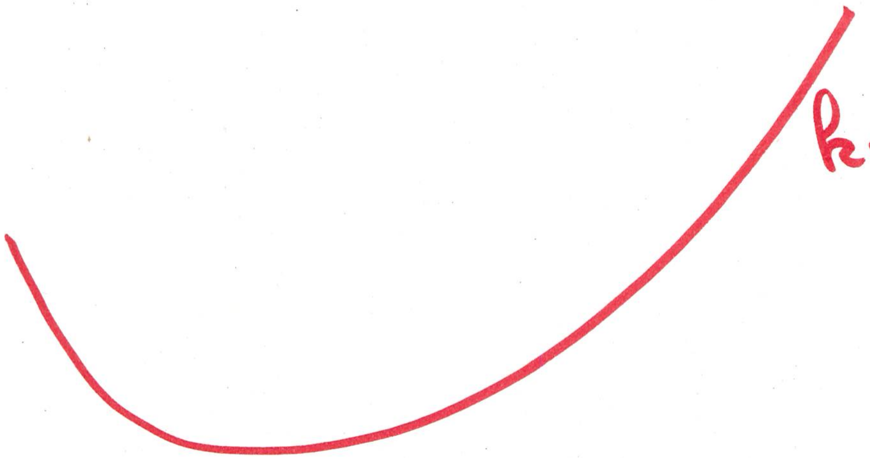
für $k \geq 1$ $[f'' = k(k-1)x^{k-2}]$

aber <u>nicht</u> konvex für $0 \le k \le 1$

($f(x) = \sqrt{x}$ <u>nicht</u> konvex)

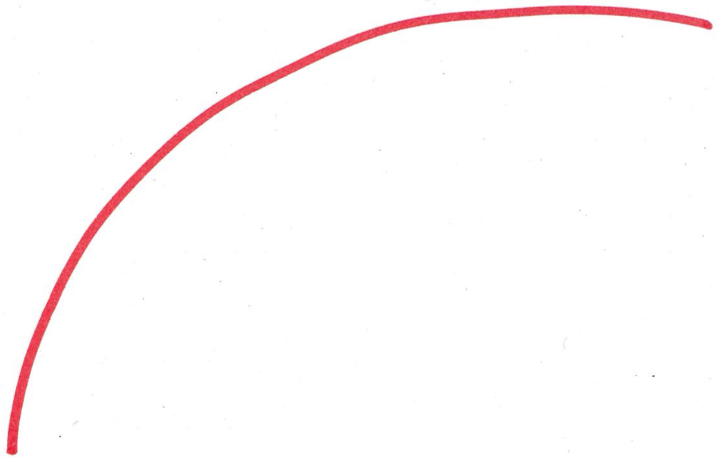






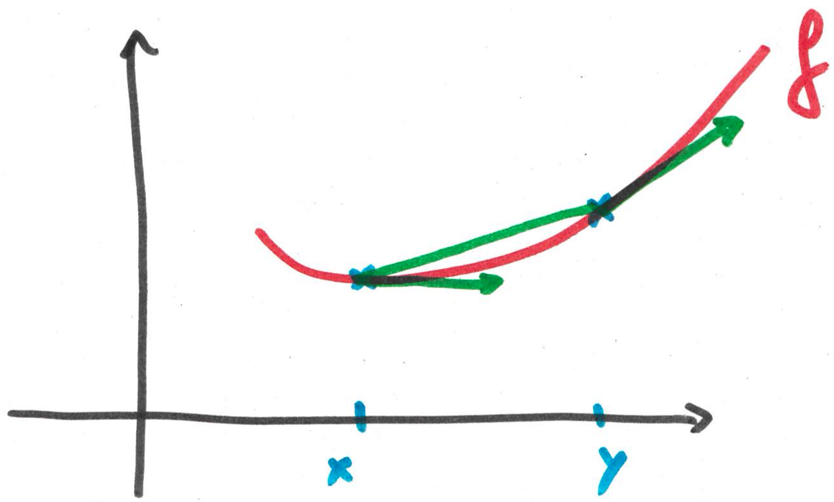
konvex

nicht konvex



Ideen:

Falls f ist <u>konvex</u>



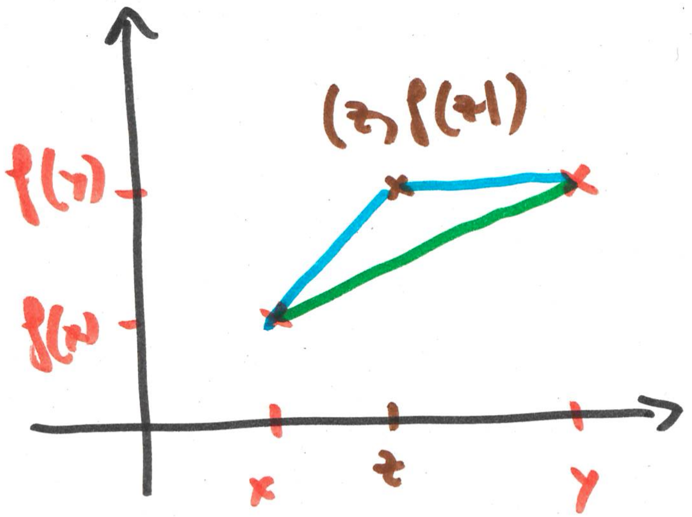
Man sieht "geometrisch", dass

$f'(x) \leq f'(y)$

gilt (für $x \leq y$)

$\Rightarrow f'$ ist wachsend

__Umgekehrt:__ nehmen wir an $f'' \geq 0$
[f' ist wachsend]



Wenn der Graph nicht oben die Strecke ist ...

Dann ist

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} > \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ f'(c) & & f'(d) \\ c \in [x,z] & & d \in [z,y] \end{array}$$

$\Rightarrow$ f' __nicht__ wachsend

Einige Anwendungen:

(1) [Young Ungleichung]

Sei $\boxed{p \in \left]1, +\infty\right[}$

Es gibt genau eine Zahl $\boxed{q > 1}$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (z.B. $p = 2$, $\Rightarrow q = 2$

$p = 4 \Rightarrow q = \frac{4}{3}$)

Für $x, y \geq 0$ gilt

$$\boxed{xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}}$$

Sei $f(x) = -\log(x)$ auf $]0, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

$\Rightarrow f$ ist <u>konvex</u>

Insbesondere für $0 < x < y$:

$$-\log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq -\frac{1}{p}\log(x) - \frac{1}{q}\log(y)$$

$$\Rightarrow \quad \log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log(x) + \frac{1}{q}\log(y)$$

$$\overset{\exp}{\Longrightarrow} \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geq x^{1/p} y^{1/q}$$

Für $x = u^p$, $y = v^q$ folgt

$$\boxed{uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}} \quad \text{(Young ungl.)}$$

320

Kor. [5.6.6] (Hölder)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

① $k \in \mathbb{N}$, x_i, y_i, $1 \le i \le k$, in $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

[z.B. $p = q = 2$

$$\left|\sum x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2\right)^{1/2}]$$

② [Minkowski] $k \in \mathbb{N}$, x_i, y_i in $\mathbb{C}$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

5.7 – Taylor Polynome

Idee: $f \in C^k(I)$

Ziel: Polynome mit Grad $\leq k$ finden, die f in der Nähe von x_0 "am besten" approximieren.

$k = 1$: $f \in C^1(I)$

$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$: Polynom von Grad ≤ 1, das f "gut" approximiert in der Nähe von x_0

Def. $k \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, k mal differenzierbar

$x_0 \in I$

Das Taylor-Polynom vom Grad $\leq k$ an der Stelle x_0 ist:

$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

$$\boxed{f^{(0)} = f}$$

Bezeichnen: $T_k f(x; x_0)$

z.B.

(1) $f(x) = e^x$

$x_0 = 0$: $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$\rightsquigarrow \quad T_k \exp(x;0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!}$

$x_0 = 1$: $f^{(k)}(1) = e^1 = e$

$\rightarrow \quad T_k \exp(x;1) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \dots + \frac{e}{k!}(x-1)^k$

(2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$\rightsquigarrow \quad T_k f(x;0) = 1 + x + \dots + x^k$

(3) $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d, \quad a_d \neq 0$

$\underline{x_0 = 0}$:

$$T_k f(x;0) = a_0 + \cdots + a_k x^k, \quad k \leq d$$

$$T_k f(x;0) = f(x) \qquad k > d$$

(weil $f^{(i)} = 0$ für $i > d$)

$\underline{x_0 \neq 0}$: $\underline{k = d}$ oder $\underline{k > d}$

$$\Rightarrow \quad T_k f(x;x_0) = f(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$= f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^d}{d!} f^{(d)}(x_0)$$

Satz. [5.7.3]

$k \in \mathbb{N}_0$; $I \subset \mathbb{R}$ Intervall ; $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Hyp: f is $(k+1)$ mal differenzierbar

Sei $x_0 \in I$

Für $x \in I$ gibt es c zwischen x und x_0 sodass

$$f(x) = T_k f(x; x_0) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

$$= f(x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

z.B. **$k=0$:** $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$

$\longrightarrow$ Mittelwertsatz!

$k=1$: $f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$

Beweis für $k=1$: $x_0 = 0$, $f \in C^2(I)$

Ziel: c mit $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{f''(c)}{2} x^2$ finden!

Es gibt $a \in \mathbb{R}$ sodass

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{a}{2} x^2$$

Sei $\quad g(y) = f(0) + y f'(0) + \frac{a}{2} y^2$

für $\quad y \in \mathbb{R}$

Dann ist: $\quad g(0) = f(0)$

Sei $\quad g(y) = f(y) - \left(f(0) + y f'(0) + \frac{a^2}{2} y^2 \right)$

für $y \in I$

Es gilt:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$g'(y) = f'(y) - \left(f'(0) + a y \right)$$

$$\Rightarrow \quad g'(0) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(0)$$

$$g''(y) = f''(y) - a$$

__Fall 1__: $g''(x) > 0 \iff f''(x) > a$

Falls es gibt __nicht__ c mit $f''(c) = a$,

folgt dass $f''(y) - a > 0$ für alle y

$\Rightarrow$ $g''(y) > 0$

$\Rightarrow$ $g'(y)$ wachsend

$\Rightarrow$ $g'(y) \geq 0$ weil $g'(x) = 0$

$\Rightarrow$ g ist wachsend

$\Rightarrow$ $g(0) = g(x) = 0$ nicht möglich