Kor. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $k+1$ mal diff.

Sei $M \in \mathbb{R}_+$ sodass

$$|f^{(k+1)}(x)| \leq M \quad \text{für } x \in I$$

[z. B. $I = [a, b]$, $f \in C^{k+1}(I)$]

Dann gilt für $x_0 \in I$, $x \in I$

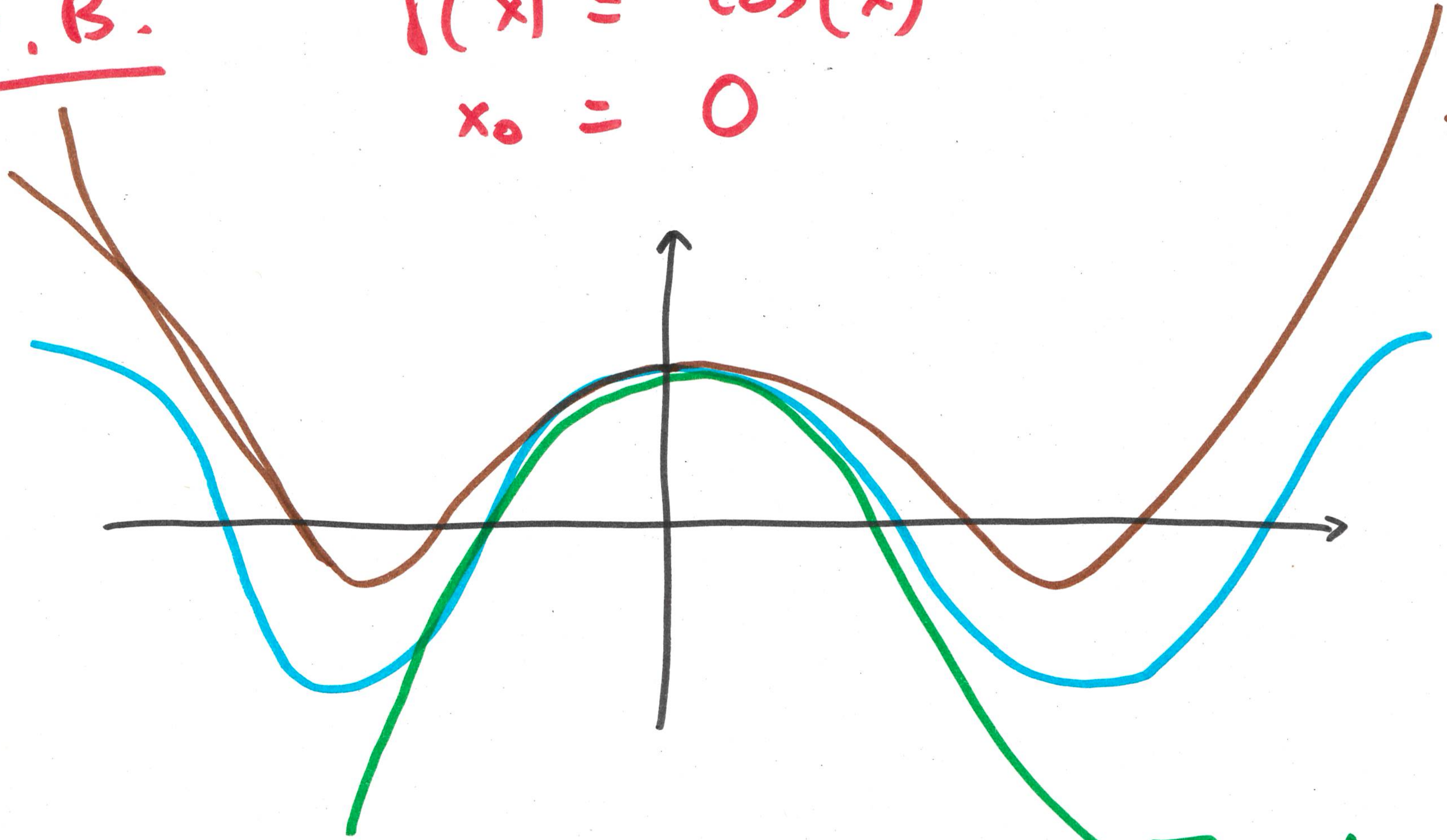
$$\left| f(x) - T_k f(x; x_0) \right| \leq \frac{M}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}$$

[Nur nützlich wenn $|x - x_0|$ klein ist, sodass $|x - x_0|^{k+1}$ klein ist].

z. B.

$f(x) = \cos(x)$

$x_0 = 0$



$T_4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

$T_2 = 1 - \frac{x^2}{2}$

$=$

T_3

$$T_3 = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \cancel{\frac{\cos^{(3)}(0)}{6}}$$

$(x_0 = 0)$

$\cos' = -\sin$

$\cos'' = -\cos$

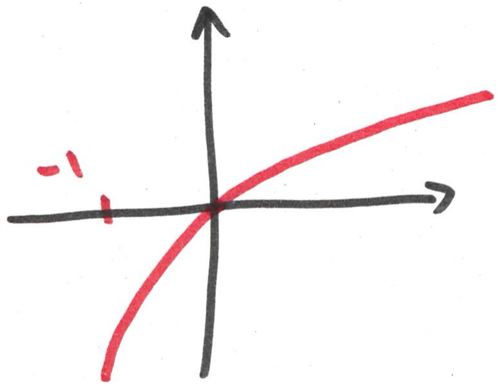
$\cos''' = \sin, \ \sin(0) = 0$

Bsp.

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$I =]-1, +\infty[\quad , \quad x_0 = 0$$

$$f(x_0) = 0$$



$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad , \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\ldots \quad , \quad f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} (-1)^{k-1}$$

$$T_k f(x; 0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

Für $x = 2$ [oder $x > 1$] ist die Folge $T_k f(2;0)$ <u>nicht</u> konvergiert:

$$T_k f(2;0) = 2 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \dots + \frac{(-1)^{k-1} 2^k}{k}$$

(partielle Summen einer Reihe mit Gliedern nicht $\to 0$)

Sei $\underline{-1 < x < 1}$:

$$|f^{(k+1)}(x)| \le \frac{k!}{|1+x|^{k+1}}$$

$\cancel{\text{Vor.}}$

$\Longrightarrow$

$$\left|\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right)\right|$$

$$\leq \frac{k!}{(k+1)!} \frac{|x|^{k+1}}{|1+c|^{k+1}} \,, \quad c \text{ zwischen } x \text{ und } 0$$

Falls $\underline{0 \leq x < 1}$: $c \geq 0$

$$\Rightarrow |1+c| \geq 1$$

$$\leadsto \left| \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

<u>Später:</u> $\lim_{k \to +\infty} T_k f(x;0) = \log(1+x)$

für $-1 < x < 1$.

Kor. $k \in \mathbb{N}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(I)$

$x_0 \in I$

Es gilt: $f(x) = T_k f(x; x_0) + (x - x_0)^k \, r(x)$

$[r(x_0) = 0]$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0$.

[Warum?

$$|r(x)| = \left| \frac{f(x) - T_k f(x; x_0)}{(x - x_0)^k} \right| = \frac{|f^{(k+1)}(c)|}{(k+1)!} |x - x_0|]$$

beschränkt für $|x - x_0| \leq 1$
weil $f \in C^{k+1}$

Anwendung: Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \begin{cases} f(x_0) = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

L'Hospital Regel:

Falls f, g an x_0 diff. sind und $g'(x_0) \neq 0$, ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)} \longrightarrow f'(x_0) \cdot \frac{1}{g'(x_0)} \right)$$

<u>z. B.</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

weil $(e^x - 1)' = e^x$

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$\longrightarrow \cos(0) = 1$

Mit Taylor Polynome:

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$: wir versuchen f, g mit Taylor Polynome zu ersetzen, sodass den Grenzwert "klar" ist:

$$f(x) = T_k f(x; x_0) + (x-x_0)^k r_1(x)$$
$$g(x) = T_{k'} g(x; x_0) + (x-x_0)^{k'} r_2(x)$$

Falls $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, ist für $k \geq 3$, $T_k f(x; x_0) = \dfrac{(x-x_0)^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \dots$

Für k, k' gross genug, erhaltet man die Approximation

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{\frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x_0)}{\frac{(x-x_0)^{k'-1}}{(k'-1)!} g^{(k'-1)}(x_0)} = (x-x_0)^{k-k'} \times \frac{(k'-1)!}{(k-1)!} \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{g^{(k'-1)}(x_0)}$$

z.B.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sin(x^4)} \; ?$$

$f'(x) = -\sin(x) + x \;, \quad f'(0) = 0$

$g'(x) = 4x^3 \cos(x^4) \;, \quad g'(0) = 0$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} + r_1(x)x^4$$

$$= \frac{x^4}{24} + x^4 r_1(x), \quad r_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$g(x)$:

seit $\sin(y) = y + y\,r_2(y)$, $r_2(y) \xrightarrow[y \to 0]{} 0$

gilt $\sin(x^4) = x^4 + x^4 r_2(x^4)$, wo $r_2(x^4) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sin(x^4)} = \frac{\frac{x^4}{24} + x^4 r_1(x)}{x^4 + x^4 r_2(x^4)}$$

$$= \frac{1/24 + r_1(x)}{1 + r_2(x^4)} \longrightarrow \frac{1/24}{1}$$

Falls: $f'(0) = 0, \quad f''(0) \neq 0$

$(x_0 = 0)$ $\quad g'(0) = 0, \quad g''(0) \neq 0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 r_1(x), \quad r_1(x) \to 0$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} g''(0) + x^2 r_2(x)$$

$$\leadsto \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 r_1(x)}{\frac{x^2}{2} g''(0) + x^2 r_2(x)}$$

$$= \frac{1/2\, f''(0) + r_1(x)}{1/2\, g''(0) + r_2(x)} \longrightarrow \frac{f''(0)}{g''(0)}$$

__Bemerkung__ : es kann sein dass

$$f \in C^{\infty}(I)$$

__aber__

$$\boxed{T_k f(x; x_0) \underset{k \to +\infty}{\not\longrightarrow} f(x)}$$

Es kann sein:

(1) $T_k f(x; x_0)$ konvergiert __nicht__ wenn $x \neq x_0$

(2) $T_k f(x; x_0)$ konvergiert für alle x, __aber__ gegen $g(x) \neq f(x)$ für $\underline{x \neq x_0}$

Satz. (5.7.9)

$k \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(I)$

$x_0 \in I$, nicht das Max/Min von I

Falls $\underline{f'(x_0) = 0}$, und es gibt $j \leq k$

mit

$$\begin{cases} f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(j-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(j)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 7.8. \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \\ (j = 2) \end{array}}$$

Dann:

(1) falls j <u>ungerade ist</u>, ist x_0 <u>nicht</u> ein lokales Extremum

(2) falls j gerade ist, ist x_0

$\begin{cases} \text{ein } \underline{\text{lokales Max.}} \text{ falls } f^{(j)}(x_0) < 0 \\ \text{ein } \underline{\text{lokales Min.}} \text{ falls } f^{(j)}(x_0) > 0 \end{cases}$

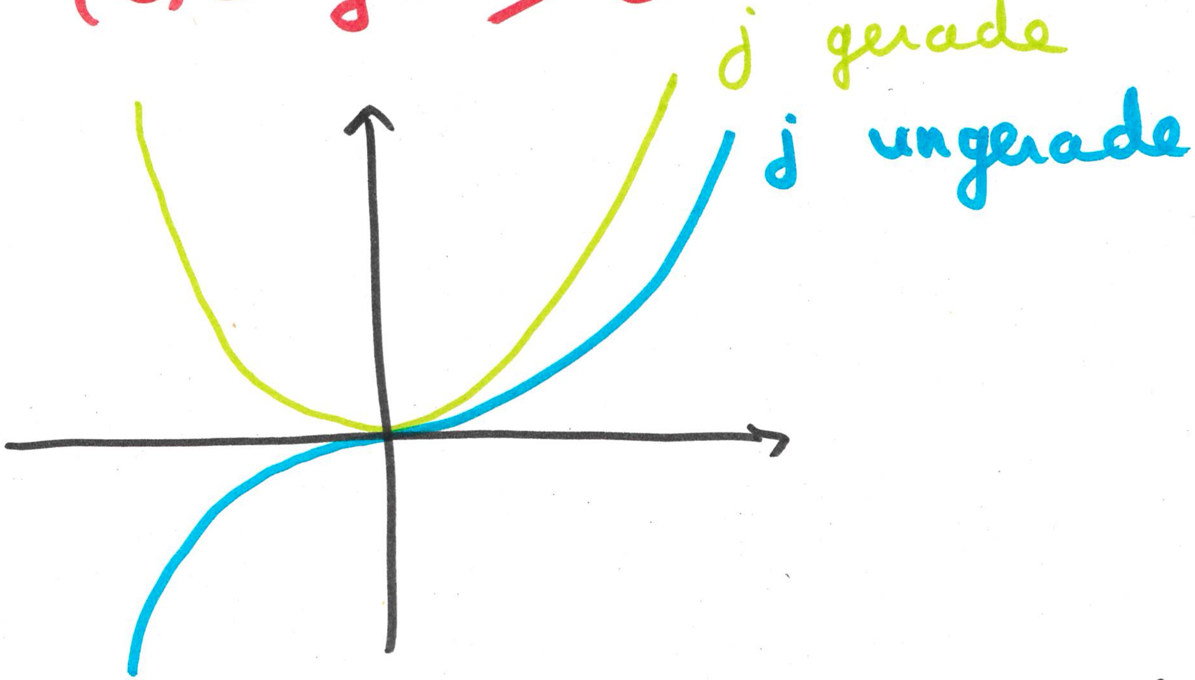
345

<u>z.B.</u> $f(x) = x^j, \quad j \in \mathbb{N}$

$x_0 = 0$

$f'(0) = \ldots = f^{(j-1)}(0) = 0$

$f^{(j)}(0) = j! > 0$



<u>Insbesondere:</u> falls $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$,

hat f ein $\begin{cases} \text{lokales Max. falls } f''(x_0) < 0 \\ \text{—— Min. falls } f''(x_0) > 0 \end{cases}$

Warum?

$$T_j f(x; x_0) = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + f(x_0)$$

$$\rightsquigarrow \quad f(x) - f(x_0) \approx \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

hat das Signum von $f^{(j)}(x_0)\,(x - x_0)^j$

j <u>ungerade</u>: das Signum ändert sich zwischen $x < x_0$, $x > x_0$

$\Rightarrow$ kein lokales Extremum

j <u>gerade</u>: das Signum ist das von $f^{(j)}(x_0)$ (für x in der Nähe von x_0)

Beispiel: $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

Hat f ein Min? ein Max?

$$f'(x) = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$$
$$= (n-x) x^{n-1} e^{-x}$$

$\rightsquigarrow$ f kann nur lok. Min/Max an $x = 0$ oder $\boxed{x = n}$ haben

$$f''(x) = x^{n-2} e^{-x} \left[n(n-1) - 2nx + x^2 \right]$$

$$f''(n) = -n^{n-1} e^{-n} < 0$$

$\longrightarrow$ $x = n$ ist ein <u>lokales Max.</u>