Insbesondere: $f([a,b])$ ist <u>beschränkt</u>; wegen den Zwischenwertsatz folgt auch das

$$f([a,b]) = [\underline{\min f}, \max f]$$

$$\min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

<u>Beweis</u>. Ich nehme an zuerst dass f ist <u>beschränkt</u>: $X = f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ ist nicht leer und beschränkt

Es gibt $M = \sup X \in \mathbb{R}$

<u>Frage</u>: ist M ein Element von X?

Für $n \geq 1$, ist $M - \frac{1}{n} < M$ keine obere Schranke von $X \Longrightarrow$ es gibt $x_n \in X$ mit

$$M - \frac{1}{n} < \overset{f(x_n)}{y_n} \leq M$$

Dann ist $y_n = f(x_n)$ für ein $x_n \in [a,b]$.

Bemerkung: $|y_n - M| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim \underset{\overset{\parallel}{f(x_n)}}{y_n} = M$.

Bolzano-Weierstrass: es gibt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; dann $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$ ↳ f stetig
$[x_{n_k} \to x]$ $\qquad \underset{k\to\infty}{\downarrow}$ M

$\Rightarrow \boxed{M = f(x)}$

<u>D.h.</u>: $f(x)$ ist Maximum von f auf $[a,b]$

(<u>Bemerkung:</u> wie kann man das Max/das Min konkreterweise finden/approximieren?)

Warum ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig beschränkt?

Nehmen wir an, es ist nicht den Fall:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists\ x_n \in [a,b], \quad |f(x_n)| \geq n$$

(x_n) ist beschränkt $\Rightarrow$ es gibt eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \longrightarrow x \in [a,b]$ und

$$|f(x_{n_k})| \geq n_k \geq k \quad \text{für alle } k$$

$$\downarrow$$

$$|f(x)|$$

ist nicht möglich.

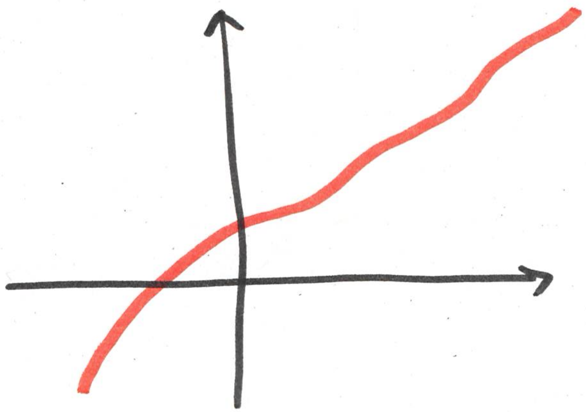
3.4. Injektive stetige Funktionen

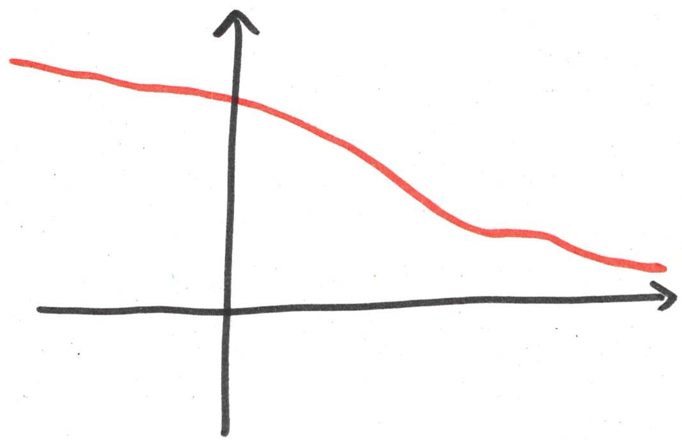
Ziel: Injektivität leicht überprüfen!

Satz. (3.4.1) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boxed{\text{stetig}}$

f injektiv $\iff$ f ist streng monoton

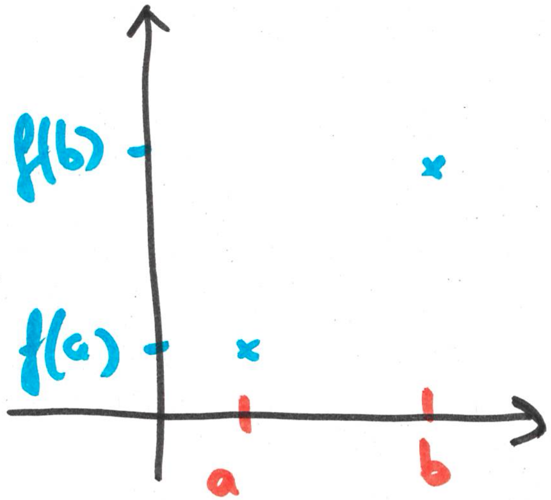




Beweis: f streng monoton $\Rightarrow$ f injektiv
schon gesehen

f injektiv: $I = [a, b]$
$a < b$

$\Leftarrow$ $f(a) \neq f(b)$
$\llcorner$ f injektiv



Falls $f(a) < f(b)$, beweisen wir dass f ist streng wachsend.

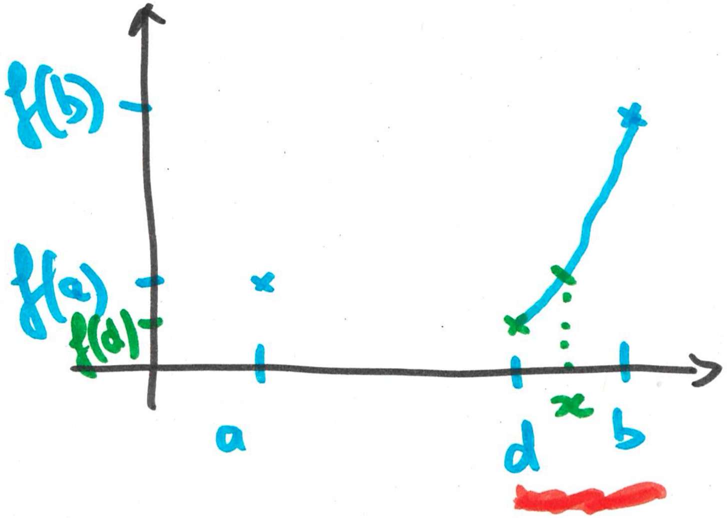
D.h. für $a \leq c < d \leq b$, wir wollen $\boxed{\text{überprüfen } f(c) < f(d)}$

$a \leq \cancel{\ } c < d \leq \cancel{\ } b$

(1) $\underline{f(d) > f(a)}$:

Falls nicht, $f(d) < f(a)$

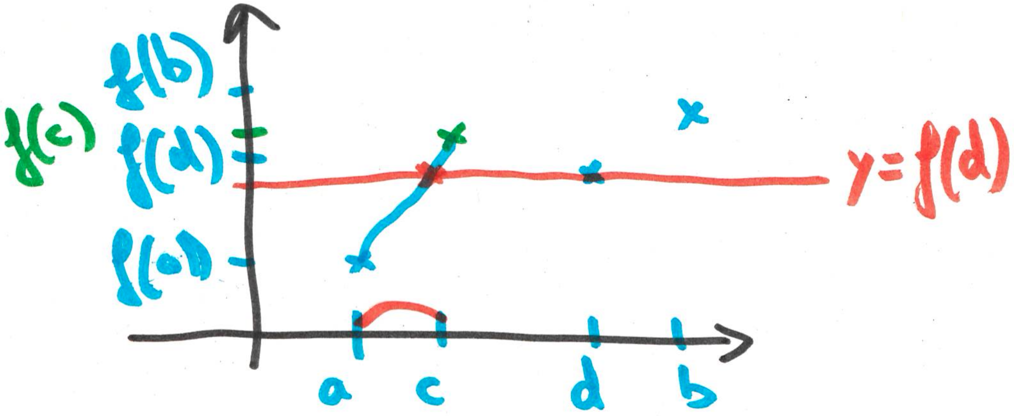
[$f(d) = f(a)$ nicht möglich weil f injektiv]



$f(d) < \underline{f(a)} < f(b)$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ es gibt $x \in [d, b]$ mit $f(x) = f(a)$, widerspruch! [f injektiv]

(2) $\underline{f(c) < f(d)}$:



Falls nicht, $f(c) > f(d)$

$f(a) < f(d) < f(c)$

$\overset{\text{Zw.Satz}}{\Longrightarrow}$ es gibt $y \in [a, c]$ mit $f(y) = f(d)$, widerspruch!

186

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv, stetig

$J = f(I) =$ Bild von f

$= \{ f(x) \mid x \in I \} \subset \mathbb{R}$

J ist ein <u>Intervall</u> [Zwischenwertsatz]

Interpretieren wir

$$f : I \longrightarrow J$$

die ist : $\begin{cases} \cdot \text{ injektiv} \\ \cdot \text{ surjektiv} \end{cases}$ [jede $y \in J$ hat der Form $y = f(x)$ für mindestens ein $x \in I$]

$\Rightarrow$ f ist $\boxed{\text{bijektiv}}$

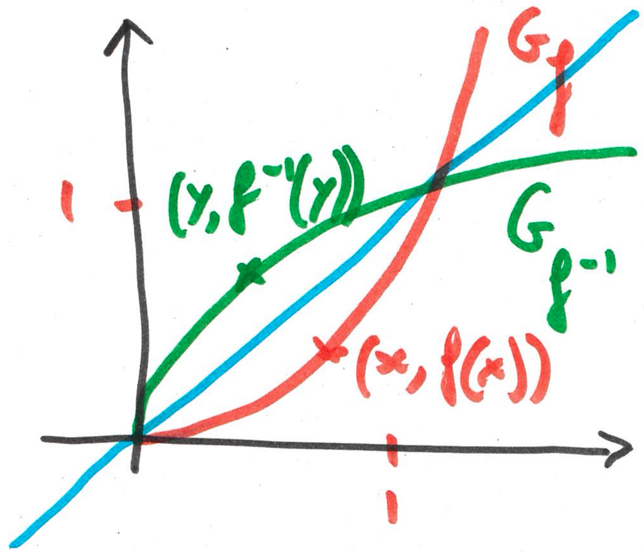
Es gibt die <u>Umkehrfunktion</u>

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

so dass $f^{-1}(y) =$ die einzige Lösung $x \in I$ der Gleichung $f(x) = y$

[<u>z.B.</u> $I = \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2$
$J = \mathbb{R}_+$
$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$]

($G_{f^{-1}}$ ist die Spiegelung von G_f an der Gerade $y = x$)



f^{-1} ist injektiv,

<u>Satz</u> [3.4.2] $\boxed{f^{-1} \text{ ist stetig}}$, sie ist streng wachsend (bzw. fallend) $\Leftrightarrow$ f ist streng wachsend (bzw. fallend)

<u>z.B.</u> $k \in \mathbb{N}$

$I = \mathbb{R}_+$

$f(x) = x^k$, stetig, streng wachsend

$f(I) = [0, +\infty[$

$\longrightarrow$ es gibt eine stetige, wachsende Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}_+$$

bezeichnet $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$
$= x^{1/k}$

3.5. (Andere) Grenzwerte von Funktionen

z.B. $I =]a, b]$

$f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$

es kann sein dass "$f(x) \longrightarrow y \in \mathbb{C}$ wenn $x \longrightarrow a$"

es kann auch sein dass "$f(x) \longrightarrow +\infty$ oder $-\infty$ wenn $x \longrightarrow a$"

oder $J =]a, +\infty[$, $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$

es kann sein dass "$f(x) \longrightarrow y \in \mathbb{C}$ als $x \longrightarrow \infty$"

oder "$f(x) \longrightarrow +\infty$ als $x \longrightarrow +\infty$"

z. B.

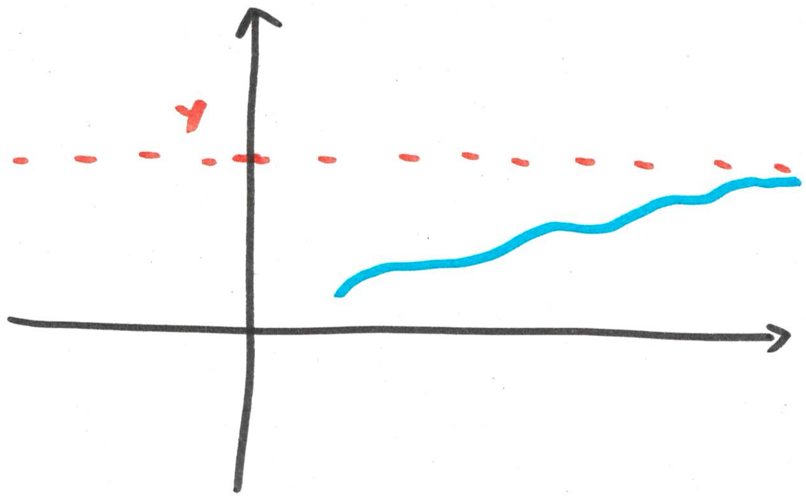
$$f : \left]a, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{C}$$

(vielleicht nicht stetig)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists R \in \mathbb{R}, \quad \forall x > R, \quad |f(x) - y| < \varepsilon$$



z. B.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 1}{2x^3 + 5} = \frac{1}{2}$$

Folgen kriterium: $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$\alpha \in \mathbb{C}$ oder $+\infty$ oder $-\infty$

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

β auch

(vielleicht andere Bedingungen wie $x > \alpha$ oder $x < \alpha$)

$$\Updownarrow$$

für alle Folgen (x_n) in I [vielleicht mit andere Bedingungen] die gegen α konvergieren,

ist $(f(x_n))$ gegen β konvergent.

z.B.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ (wie $\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty$)

$\iff$ falls $\lim x_n = +\infty$

ist $\lim f(x_n) = +\infty$

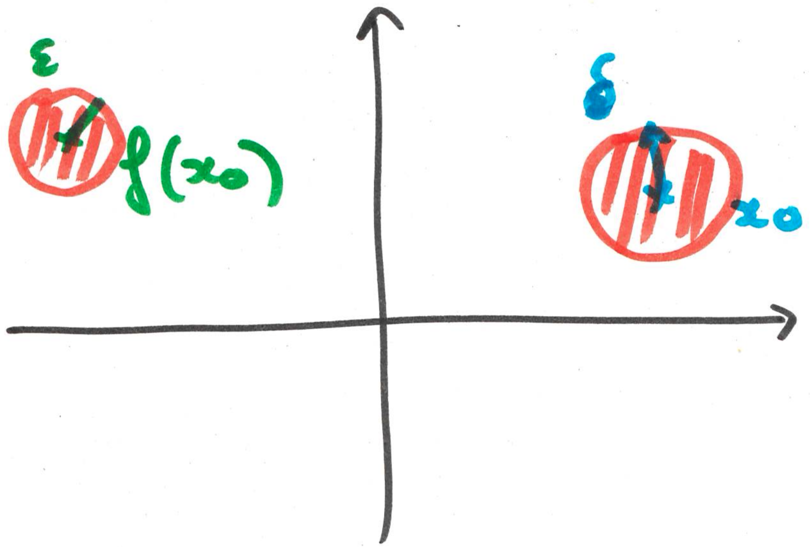
3.6 Stetige Funktionen auf $I \subset \mathbb{C}$

Sei $I \subset \mathbb{C}$

und $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

<u>Def.</u> f ist stetig falls:

$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$ für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$, ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



<u>Resultate vom Abschnitt</u> $\boxed{3.2}$ sind auch OK für solche Funktionen (<u>insb.</u> $+, \cdot,$ Verknüpfung und das Folgenkriterium)

Kapitel IV

Folgen / Reihen von Funktionen

Ziel:

Neue (insb. stetige) Funktionen definieren mit "un~~e~~endlich viele" Operationen, d.h. f definieren durch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

wo $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ sind Funktionen sodass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jede $x \in I$

(**Z.B.**: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{C}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x| < 1$)

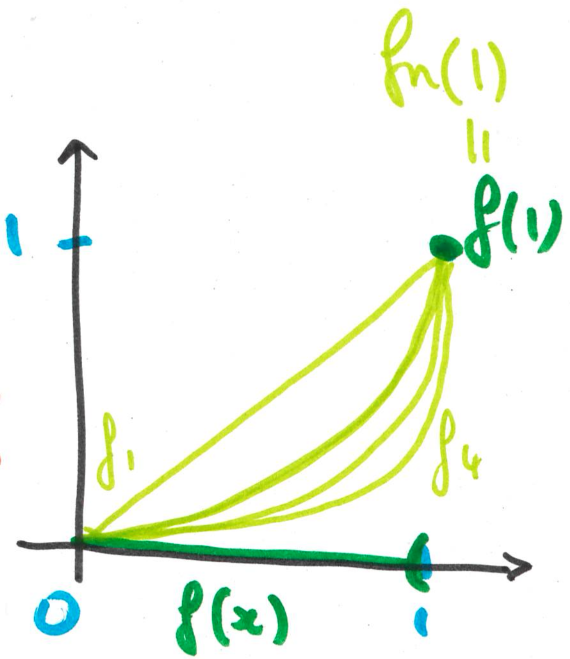
__Bem.__ Folge von Funktion: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Für jede x ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen

4.1. <u>Gleichmässig Konvergenz</u>

<u>z.B.</u> $I = [0,1]$

$f_n(x) = x^n$, stetig



$$\lim_{n \to \infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$(0 \le x \le 1)$

f ist an der Stelle 1 <u>nicht</u> stetig. $= f(x)$