Def. [gleichmässig Konvergenz]

$I \subset \mathbb{C}$

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

f_n konvergiert gegen f gleichmässig auf I

$$\Updownarrow$$

(*) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \boxed{\forall x \in I,} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Interpretation: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ "ungefähr so schnell an alle Stellen"

Vergleichung mit : $\forall x \in I, \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$

(**) $\boxed{\forall x \in I,} \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Das Unterschied : im Fall (*) hängt N nicht von $x \in I$ ab (nur von $\varepsilon > 0$).

Mit gleichmässig Konvergenz approximieren wir alle Werte von f mit dieselbe Funktion f_n.

Satz. (4.1.4) $I \subset \mathbb{C}$, (f_n) Funktionen $f_n : I \to \mathbb{C}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

Falls $f_n \to f$ gleichmässig auf I, und f_n stetig ist für alle n, dann ist f auch stetig auf I.

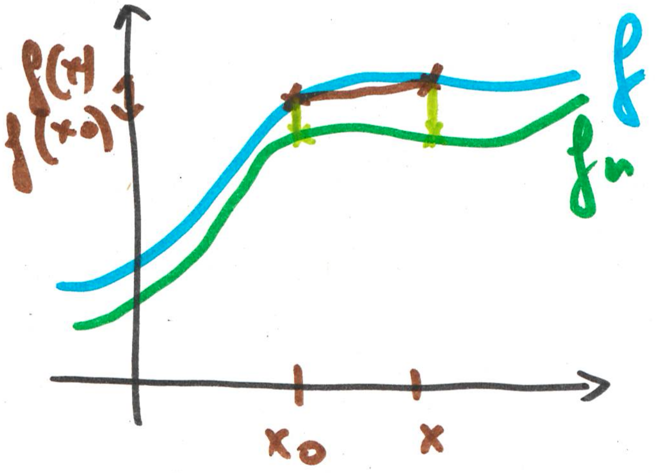
<u>Beweis</u>: $x_0 \in I$

$x \in I$, $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

"klein" für n gross weil $f_n(x) \to f(x)$ (bzw. $f_n(x_0) \to f(x_0)$)

"klein" für x nah genug von x_0, weil f_n stetig



[<u>Pb.</u>: wie gross n soll, hängt von x ab; kein Problem mit gleichm. Konvergenz!]

$\varepsilon > 0$

Es gibt $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{für } \underline{\underline{\text{alle}}} \; x \in I$$

[<u>gleichm. Konvergenz</u>]

$\Rightarrow$ für alle $x \in I$ ist

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

f_n ist <u>stetig</u> $\Rightarrow$ es gibt $\delta > 0$ s.d.

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } |x - x_0| < \delta.$$

<u>D.h.</u> für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

sodass f stetig ist.

Beispiel:

(1) $I = [0,1]$

$f_n(x) = x^n \,, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x^n, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$\le x^n$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$: wir brauchen $x^n < \frac{1}{2}$

Wie gross n sein soll hängt von $x<1$ ab, und die **kleinste** Zahl n (als Funktion von x)

konvergiert gegen $+\infty$ wenn $x \to 1$

$$\left[\quad n > \frac{2}{\log(1/x)} \right]$$

(2) $f_n(x) = 1 + \dots + x^n$, $x \in I =]-1,1[$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

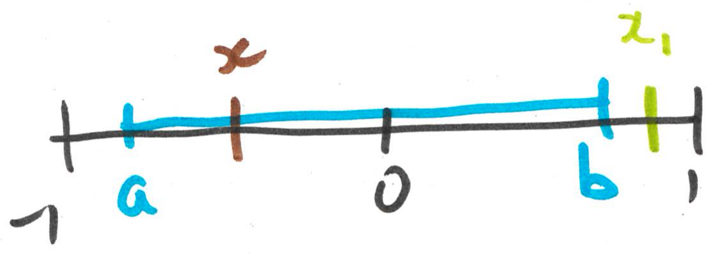
$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}, \quad (x \neq 1)$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|}, \quad x \in I$$

Die Konvergenz ist <u>nicht</u> gleichmässig auf I!

Was können wir machen?

Wir beschranken x auf $]a,b[$ mit $-1 < a < b < 1$



Für $\boxed{x \in]a,b[}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \leq \underbrace{\frac{\max(|a|,|b|)^{n+1}}{\min(|1-a|,|1-b|)}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab!}}$$

Weil $\max(|a|,|b|)^{n+1} \longrightarrow 0$,

folgt $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig auf $]a,b[$.

<u>Satz</u> $\Longrightarrow$ f ist auf $]a,b[$ stetig

Alle $x \in I$ gehören ein Intervall $]a,b[$ mit $-1 < a < b < 1$, sodass f ist an x stetig.

<u>Konkreterweise:</u> wie überprüfen wir dass $f_n \to f$ gleichmässig?

Man versucht

$$|f_n(x) - f(x)| \leq b_n$$

zu finden, wo $\begin{cases} b_n \text{ hängt \underline{nicht} von } x \text{ ab} \\ b_n \to 0 \end{cases}$

z.B. falls

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für } x \in I$$

folgt gleichm. Konvergenz

Es gibt auch ein Cauchy-Kriterium:

Satz (4.1.6). $I \subset \mathbb{C}$

(f_n) Funktionen $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$

Es gibt $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ sodass $f_n \to f$ gleichmässig $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \forall m \geq N, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

4.2 – Normal Konvergenz von Reihen

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \longleftrightarrow$ Folge der $s_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$s_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

(falls f_n stetig sind, so ist s_n)

Wir suchen ein Kriterium für gleich. Konv. der Reihe.

Seien n, m in $\mathbb{N}$, $m \geq n$;

$$|s_m(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)|$$

$$\leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_m(x)|$$

Wir nehmen an: es gibt $b_n \in \mathbb{R}_+$ mit

für alle $x \in I$, $|f_n(x)| \leq b_n$.

[z.B. $I = [a,b]$,
f_n stetig
$\Rightarrow f_n$ beschränkt
(Extremumsatz)]

Dann ist

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq b_{n+1} + \dots + b_m = t_m - t_n$$

wo $t_n = \cancel{}\ b_1 + \dots + b_n$

Wir nehmen weiter an: die Reihe $\sum b_n$ konvergiert
(d.h. (t_m) beschränkt)

$\Rightarrow$ Satz (4.2.2) Falls die zwei Hyp. erfüllt sind
ist $\sum f_n$ gleich. Konvergent auf I.

Kor. Falls die zwei Hyp. erfüllt sind und jede f_n stetig auf I ist, dann ist $\sum f_n$ auf I stetig.

Def. Eine Reihe $\sum f_n$ <u>konvergiert normal</u> falls:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b_n \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergiert

z.B. $(I = \mathbb{R})$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ konv. normal

weil $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, und $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert

$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ ist definiert und stetig auf $\mathbb{R}$

("Fourier-Reihe")

<u>Bemerkung</u>: oft überprüft normal Konvergenz nur auf Teilmengen der Definitionsmenge! (wie Seite 202)

4.3. Potenzreihen

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

"Polynom mit Grad unendlich"

Partielle Summen:

$s_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

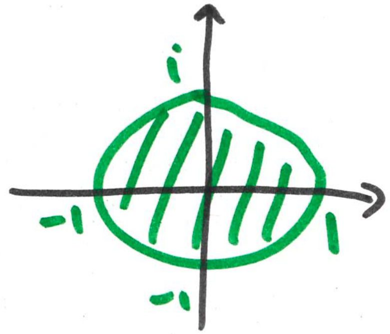
Polynom mit Grad $\leq n$

(Alle Polynome sind Potenzreihen).

Die Gliedern sind alle ~~s~~ stetige Funktionen (auf $\mathbb{C}$)

$a_n x^n$

~~Konver~~ [$\underline{z.B.}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$



$x \in \mathbb{C}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$]

<u>Konvergenz:</u> . die Reihe $\sum a_n x^n$ konvergiert mindestens für $x=0$, mit Summe a_0

<u>Satz.</u> (4.3.1) (a_n) komplexe Zahlen $0 \neq x_0 \in \mathbb{C}$ sodass $\sum a_n x_0^n$ konvergiert

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum a_n x^n$ konvergiert <u>normal</u> auf alle Mengen $D_r = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r \}$ wo $r < |x_0|$.