1.6. Komplexe Zahlen

$\mathbb{C}$ ist eine Erweiterung von $\mathbb{R}$ sodass

Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1}$ in $\mathbb{C}$ gibt es (mindestens) eine $x \in \mathbb{C}$ mit

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

z.B. $x^2 + 1 = 0$ hat Lösungen i (und $-i$)

Definition. Die Menge ist

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$$

mit

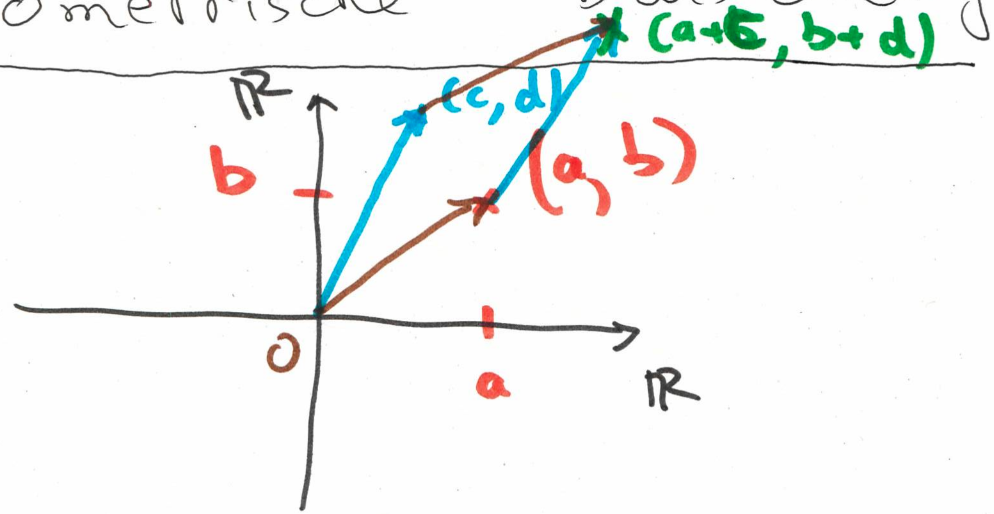
$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

und

$$\boxed{(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)}$$

S. 20 Skript (v. 30.9.2020 falsch)

Geometrische Darstellung: $\mathbb{C}$ = die Ebene



$+$ = addition von Vektoren in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Identifikation: $\mathbb{R}$ = komplexe Zahlen $(a,0)$

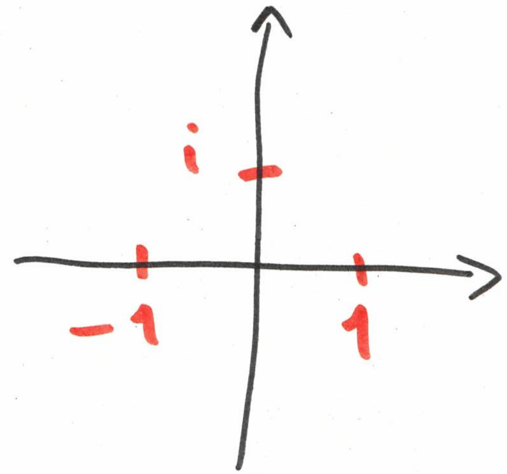
$$(a,b) = \underbrace{(a,0)}_{\text{"eine reelle Zahl"}} + (0,b) = (a,0) + \boxed{(0,1)}\underbrace{(b,0)}_{\text{reelle Zahl}}$$

[weil

$$(0,1)\cdot(b,0) = (\underbrace{0\cdot b - 1\cdot 0}_{0},\ 0\cdot 0 + 1\cdot b) = (0,b)$$]

Def. $i = (0,1) \in \mathbb{C}$

$$\boxed{(a,b) = a + ib}$$



$$\Rightarrow \quad i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$

Def. $(0,0) = 0$, $(1,0) = 1$

Es gilt alle eigenschaften der Add./Mult. der reellen Zahlen [aber keine Ordnung!]

z.B. $a \cdot b = b \cdot a$ $(a, b, c$ in $\mathbb{C})$

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a + (b+c) = (a+b) + c$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$\vdots$

Nur ~~ein~~ schwieriger ist:
für alle $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, es gibt $b \in \mathbb{C}$
mit $b \cdot a = a \cdot b = 1$ [man bezeichnet $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$]

Sei $a = x + iy$

<u>Bemerkung</u>:

$$(x+iy)\left(\frac{x}{c} - i\frac{y}{c}\right)$$
$$= (x+iy)\frac{x}{c} + (x+iy)\left(-i\frac{y}{c}\right)$$
$$= x^2 + iyx + x\cdot(-iy) + iy\cdot(-iy)$$
$$= x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} + y^2$$
$$= \frac{x^2+y^2}{c} \in \mathbb{R}_+$$

Falls $a \neq 0$ ist $x^2 + y^2 > 0$ [weil entweder $x^2 > 0$ oder $y^2 > 0$], dann ist

$$\underbrace{(x+iy)}_{a} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\underbrace{x^2+y^2}_{c''}} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{a^{-1}} = 1$$

z. B.

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2}$$

$$= \frac{2}{13} - i\,\frac{3}{13}$$

$$\frac{1+i}{2+4i} = \frac{(1+i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{6 - 2i}{4+16}$$

$$= \frac{6-2i}{20}$$

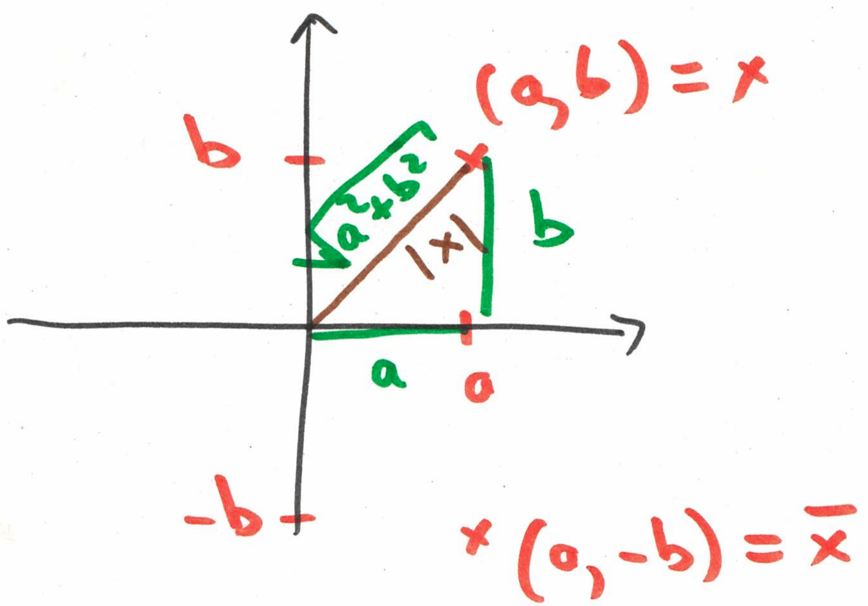
$$= \frac{3-i}{10}$$

Def. $x = (a,b) = a + ib \in \mathbb{C}$

konjugierte Zahl $\bar{x} = (a, -b) = a - ib$

Absolutbetrag $|x| = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2}_{\geq 0}}$

$|x| =$ Abstand zwischen 0 und x

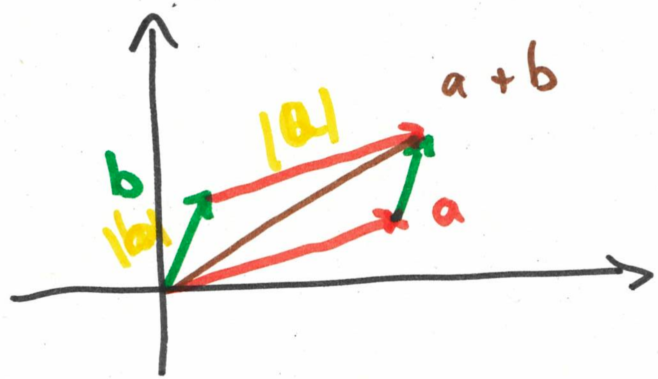


Satz - (1.6.4)

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$|a| = 0 \iff a = 0$$

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$$



[Dreiecksungleichung]

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} \,, \quad \frac{1}{\bar{a}} = \overline{\left(\frac{1}{a}\right)}$$

$$\bar{a} = a \iff a \in \mathbb{R}$$

$$a = x + iy \qquad x, y \text{ in } \mathbb{R}$$

mit $x = \frac{a + \bar{a}}{2}$, $y = \frac{a - \bar{a}}{2i}$

"Realteil" "Imaginärteil"

Notation

I endliche Menge [z.B. $I = \{1, \dots, n\}$]

Sei $u_i \in \mathbb{C}$ eine gegebene kompl. Zahl für $i \in I$ [z.B. $u_1, u_2, \dots, u_n$]

~~$u_1 + \dots + u_n$~~

Die Summe der Zahlen u_i (bzw das Produkt)

bezeichnen wir $\sum_{i \in I} u_i$ [$u_1 + u_2 + \dots + u_n$

oder $\prod_{i \in I} u_i$ $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$]

Konvention: $I = \emptyset$

$$\sum_{i\in\emptyset} u_i = 0$$

$$\prod_{i\in\emptyset} u_i = 1$$

z.B

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$0! = 1$$

$\longrightarrow$ falls I, J endlich $I \cap J = \emptyset$

$$\begin{cases} \sum_{i\in I\cup J} u_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in J} u_i \\ \prod_{i\in I\cup J} u_i = \prod_{i\in I} u_i \cdot \prod_{i\in J} u_i \end{cases}$$

z.B.

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x\in\mathbb{C},\ x\neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k\in\{0,\dots,n\}} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Regeln

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

oder

$$\prod_{k=1}^{n} (2u_i) = 2^n \prod_{k=1}^{n} u_i$$

$\vdots$

Binomialentwicklung

$n \in \mathbb{N}_0$

$a, b \in \mathbb{C}$

$(a+b)^n = \,?$

[z.B. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
$= a^2 + 2ab + b^2$]

Def. (Binomialkoeffizienten)

$n, k \in \mathbb{N}_0$

$\binom{n}{k}$ = die Anzahl der Teilmengen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ die k Elemente enthalten

"k aus n"

z.B. (1) $\binom{n}{1} = n$:

$I = \{1, \ldots, n\}$

$\{1\} \subset I$, $\{2\} \subset I$, ...

$\{n\} \subset I$

(2) $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$

(3) $\binom{n}{n-1} = n$ [falls $S \subset I$ $n-1$ Element hat, fällt genau 1 El.]

Satz - [1.6.8]

$n \in \mathbb{N}_0$

a, b in $\mathbb{C}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= a^n + n a^{n-1} b + \dots + \dots + n a b^{n-1} + b^n$$

[z.B. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

Beweis – Induktion über n

<u>$n=0$:</u>

$$\begin{array}{ccc} (a+b)^0 & = & \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k \\ \| & & \| \\ 1 & = & 1 \cdot a^0 b^0 = 1 \end{array}$$

<u>Induktionschritt:</u>

<u>Hyp.</u> die Formel gilt für $(a+b)^n$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n$$

$$\overset{(\text{Hyp})}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{n+1-\ell} b^{\ell}$$

$$\boxed{\ell = k+1} \Leftrightarrow \boxed{k = \ell - 1}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k}$$

$$+ \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^{n+1} \qquad \boxed{k = \ell}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{\text{ist das } = \binom{n+1}{k}} \Bigg) a^{n+1-k} b^{k} + b^{n+1}$$

65

Hilfsatz. Für k, n in $\mathbb{N}_0$ ist

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

[$\Rightarrow$ Binomialentwicklung]

Beweis.

$$\binom{n+1}{k} = \text{Anzahl Teilemenge } S \text{ von } \{1, \dots, n+1\} \text{ mit } k \text{ Elemente}$$

$$= A + B = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$n+1 \in S$

$\hookrightarrow S = T \cup \{n+1\}$ wo $T \subset \{1, \dots, n\}$ hat $k-1$ El.

$n+1 \notin S$

$\hookrightarrow$ Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ mit k Elemente

Berechnung der Bin. Koeff.

① „Pascalsche Dreieck"

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$ …			
0	1					
1	1	1	0	0	…	
2	1	2	1	0	…	
3	1	3 +	3	1	0	…
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
⋮						
n	1	$\binom{n}{1}$	…			
$n+1$						

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \ldots$$
$$= \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

2

Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

[z.B.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\,\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

]