Analysis III Lösungen

1. Lösen Sie die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit der Formel von d'Alembert, wobei

$$f(x) = 2e^x \quad \text{und} \quad g(x) = -3e^x.$$

[10 Punkte]

Lösung: Die Lösung ist nach der Formel von d'Alembert (mit $c = 2$) gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} g(y)\,dy \\ &= e^{x+2t} + e^{x-2t} - \frac{3}{4}\left(e^{x+2t} - e^{x-2t}\right) = \frac{e^{x+2t} + 7e^{x-2t}}{4} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

2. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t) & \text{für } x \in [0,\pi],\ t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{für } t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin(3x/2) - 2\sin(21x/6) & \text{für } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

[10 Punkte]

Lösung: Wie in Beispiel 2.B in der Vorlesung, benutzen wir die Methode der Separation der Variablen um das vorliegende Problem zu lösen. Mit dem Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ sehen wir, dass u eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems ist, wenn gilt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = 4\frac{X''(x)}{X(x)}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit folgt, dass T gegeben ist durch $T(t) = ce^{-\lambda t}$. Um die Funktion X zu bestimmen unterscheiden wir drei Fälle:

Bitte wenden!

A) $\lambda > 0$: In diesem Fall ist die Lösung von $X''(x) = -\frac{\lambda}{4}X(x)$ gegeben durch

$$X(x) = a\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right)$$

mit

$$X'(x) = -a\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right) + b\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right).$$

Aufgrund der Randbedingung $u(0,t) = 0$ und $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ folgt $a = 0$. Damit erhalten wir

$$X(x) = b\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right)$$

Zusätzlich folgt aus $u_x(\pi,t) = 0$ die Bedingung $\cos(\pi\sqrt{\lambda}/2) = 0$. Da $\cos(x) = 0$ gilt, wenn $x = (n+1/2)\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir $\sqrt{\lambda} = 2n+1$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt

$$X(x) = b_n \sin\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

B) $\lambda = 0$: In diesem Fall hat X die Form $X(x) = ax + b$. Aufgrund der Randbedingungen $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ erhalten wir $X \equiv 0$, jedoch kann dann die Anfangsbedingung nicht erfüllt werden.

C) $\lambda < 0$: In diesem Fall ist X gegeben durch

$$X(x) = a\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right) + b\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right)$$

mit

$$X'(x) = a\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right) + b\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right).$$

Da $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, impliziert $u(0,t) = 0$ dass $a = 0$. Andererseits folgt aus $u_x(\pi,t) = 0$ dass $b = 0$, weil der Cosinus-Hyperbolicus für kein $x \in \mathbb{R}$ null wird. Dies führt wieder zu einem Widerspruch.

Folglich ist die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right) e^{-(2n+1)^2 t}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten b_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen der Anfangsbedingung, $21/6 = 7/2$ gilt

$$\sin\left(\tfrac{3x}{2}\right) - 2\sin\left(\tfrac{7x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right)$$

und damit erhalten wir $b_1 = 1$, $b_3 = -2$, $b_n = 0$ sonst. Somit ist die Lösung

$$u(x,t) = \sin\left(\tfrac{3x}{2}\right)e^{-9t} - 2\sin\left(\tfrac{7x}{2}\right)e^{-49t}$$

für $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{für } (x,y) \in K, \\ u(x,y) = 3xy & \text{für } (x,y) \in \partial K, \end{cases}$$

wobei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$ und $\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 4\}$.

a) Finden Sie den Wert von u im Punkt $(0,0)$. [5 Punkte]

b) Finden Sie das Minimum von u auf K. [5 Punkte]

Lösung: In Abschnitt 8.1 des Skripts haben wir gesehen, dass die Lösung u des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe mit Radius $a = 2$, Zentrum $(x_0, y_0) = 0$ und Randwerten beschrieben durch eine Funktion $g(x,y)$ gegeben ist durch

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{4 - r^2}{4 - 4r\cos(\varphi - \varphi') + r^2} h(\varphi')\, d\varphi', \tag{1}$$

wobei

- $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$
- $g(x,y) = h(\varphi)$ für $x^2 + y^2 = 4$ mit $g(x,y) = 3xy$ und
- $u(x,y) = v(r,\varphi)$ für $x^2 + y^2 \leq 4$.

a) Wir haben

$$h(\varphi) = 12\cos\varphi\sin\varphi = 6\sin(2\varphi),$$

wobei wir die Identität $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ verwendet haben. Damit zeigt (1), dass

$$\begin{aligned} u(0,0) = v(0,0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{6}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi)\, d\varphi = \frac{12}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(2\varphi)\, d\varphi \\ &= -\frac{6}{2\pi}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0, \end{aligned}$$

da h eine $\pi-$periodische Funktion ist.

b) Nach dem Minimumprinzip für harmonische Funktionen wird das Minimum von u auf dem Rand ∂K angenommen und damit müssen wir das Minimum der Funktion

$$[0, 2\pi] \ni \varphi \mapsto h(\varphi) = 6\sin(2\varphi)$$

bestimmen. Wegen $\sin(2\varphi) \in [-1, 1]$ und $h(3\pi/4) = -6$ folgt

$$\min_{(x,y)\in K} u(x,y) = \min_{(x,y)\in\partial K} u(x,y) = \min_{\varphi\in[0,2\pi]} h(\varphi) = -6.$$

Bitte wenden!

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) + 2tu_x(x,t) + u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = e^{-x} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit der Methode der Charakteristiken. [10 Punkte]

Lösung: Das gegebene Anfangswertproblem ist von der Form

$$\begin{cases} u_t + d(x,t,u)u_x = e(x,t,u), & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

für

$$d(x,t,u) = 2t, \quad e(x,t,u) = -u, \quad f(x) = e^{-x}.$$

Nach dem Algorithmus in Abschnitt 9.3 im Skript müssen wir die DGLn

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2t, & x(0) = x_0, \\ \dot{z}(t) = -z, & z(0) = e^{-x_0}, \end{cases}$$

für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ lösen. Die Lösung der ersten Gleichung ist

$$x(t) = t^2 + x_0,$$

und somit hat man $x_0 = x(t) - t^2$. Die Lösung der zweiten Gleichung ist

$$z(t) = z(0)e^{-t} = e^{-(x_0+t)}.$$

Damit ist u gegeben durch

$$u(x,t) = e^{-(x+t-t^2)}.$$

5. Finden Sie die Biegelinie eines schmalen homogenen horizontalen Balkens der Länge 4 mit Biegesteifigkeit $EI = 1$, der bei $x = 0$ eingespannt und bei $x = 4$ frei ist und auf den eine senkrechte Kraft

$$q(x) = \delta(x-1) - \sqrt{x-3}\,H(x-3)$$

pro Längeneinheit einwirkt, wobei δ die Dirac-Deltafunktion und H die Heaviside-Funktion bezeichnet. [10 Punkte]

Lösung: Wie wir im Kapitel 11 im Skript gesehen haben, löst die Biegelinie u folgendes Randwertproblem

$$\begin{cases} u''''(x) = \delta(x-1) - \sqrt{x-3}H(x-3), \\ u(0) = u'(0) = u''(4) = u'''(4) = 0. \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir lösen dieses Anfangswertproblem wie in Beispiel 11.A durch direkte Integration der Differentialgleichung. Wir haben

$$\int_0^x \delta(y-a)\,dy = H(x-a)$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^x (y-a)^r H(y-a)\,dy &= \int_a^x (y-a)^r\,dy\,H(x-a) = \int_0^{x-a} z^r\,dz\,H(x-a)\\ &= \frac{1}{r+1}(x-a)^{r+1}H(x-a)\end{aligned}$$

für alle $a \in [0,4]$, $r \geq 0$, $x \in [0,4]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}u'''(x) &= c_0 + \int_0^x \delta(y-1)\,dy - \int_0^x \sqrt{y-3}H(y-3)\,dy\\ &= c_0 + H(x-1) - \frac{2}{3}(x-3)^{3/2}H(x-3)\end{aligned}$$

und somit

$$u''(x) = c_1 + c_0 x + (x-1)H(x-1) - \frac{2}{3}\frac{2}{5}(x-3)^{5/2}H(x-3).$$

Integrieren wir nochmals so folgt

$$u'(x) = c_2 + c_1 x + \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{(x-1)^2}{2}H(x-1) - \frac{2}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}(x-3)^{7/2}H(x-3)$$

und damit folgt

$$u(x) = c_3 + c_2 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_0}{6}x^3 + \frac{(x-1)^3}{6}H(x-1) - \frac{2}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}\frac{2}{9}(x-3)^{9/2}H(x-3).$$

Wegen $u(0) = u'(0) = 0$ erhalten wir $c_2 = c_3 = 0$. Die Randbedingungen $u''(4) = u'''(4) = 0$ ergeben

$$\begin{aligned}&c_0 + 1 - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = -\frac{1}{3}\\ &c_1 + 4c_0 + 3 - \frac{2}{3}\frac{2}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -4c_0 - 3 + \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

Setzen wir $c_0 = -1/3$ in die zweite Gleichung ein, dann erhalten wir

$$c_1 = \frac{4}{3} - 3 + \frac{4}{15} = -\frac{20-45+4}{15} = -\frac{21}{15} = -\frac{7}{5}$$

und somit ist die Biegelinie u gegeben durch

$$u(x) = -\frac{7}{10}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{(x-1)^3}{6}H(x-1) - \frac{16}{945}(x-3)^{9/2}H(x-3).$$

Bitte wenden!

Alternative Lösung: Wir haben

$$\begin{cases} u''''(x) = \delta(x-1) - \sqrt{x-3}H(x-3), \\ u(0) = u'(0) = u''(4) = u'''(4) = 0. \end{cases}$$

Dieses Problem können wir auch mittels Laplacetransformation lösen. Dazu setzen wir u zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}_+$ fort und bezeichnen mit U die Laplacetransformierte von u, d.h. es gilt

$$U(s) = \int_0^\infty u(x)e^{-sx}\,dx.$$

Wenden wir die Laplacetransformation auf die obige Balkengleichung an, so erhalten wir

$$s^4U(s) - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0) = e^{-s} - \frac{\pi^{1/2}}{2s^{3/2}}e^{-3s},$$

wobei wir die angehängte Tabelle und die Ableitungsregel verwendet haben. Wegen den Randbedingungen vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$U(s) = \frac{c_1}{s^4} + \frac{c_0}{s^3} + \frac{e^{-s}}{s^4} - \frac{\pi^{1/2}e^{-3s}}{2s^{11/2}} \quad \text{mit} \quad c_1 = u'''(0),\ c_0 = u''(0).$$

Mit der angehängten Tabelle erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{(x-1)^3}{6}H(x-1) - \frac{1}{2}\frac{32}{945}(x-3)^{9/2}H(x-3) \\ &= \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{(x-1)^3}{6}H(x-1) - \frac{16}{945}(x-3)^{9/2}H(x-3). \end{aligned}$$

Es bleibt die Konstanten c_0, c_1 zu bestimmen. Für $x = 4$ gilt

$$\begin{aligned} u''(x) &= (c_0 + c_1x + (x-1)H(x-1) - \frac{4}{15}(x-3)^{5/2}H(x-3))|_{x=4} \\ &= c_0 + 4c_1 + 3 - \frac{4}{15}, \\ u'''(x) &= (c_1 + H(x-1) - \frac{2}{3}(x-3)^{3/2}H(x-3))|_{x=4} \\ &= c_1 + 1 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen im Endpunkt $x = 4$ folgt

$$\begin{aligned} &c_1 + 1 - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{3} \\ &c_0 + 4c_1 + 3 - \frac{4}{15} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = -4c_0 - 3 + \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Setzen wir $c_1 = -1/3$ in die zweite Gleichung ein, dann erhalten wir

$$c_0 = \frac{4}{3} - 3 + \frac{4}{15} = -\frac{20-45+4}{15} = -\frac{21}{15} = -\frac{7}{5}$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit ist die Biegelinie u gegeben durch

$$u(x) = -\frac{7}{10}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{(x-1)^3}{6}H(x-1) - \frac{16}{945}(x-3)^{9/2}H(x-3).$$

6. Berechnen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion

$$f\colon (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -(\pi + x), & -\pi < x \leq -\pi/2, \\ x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Lösung: Die gegebene Funktion f ist eine ungerade, $2\pi-$periodische, stetige und stückweise zweifach differenzierbare Funktion. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, existiert somit die reelle Fourierreihe und ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Wir haben

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx\right).$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx &= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} x\frac{d}{dx}\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n}\left(x\cos(nx)\big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{d}{dx}\sin(nx)\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

und

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx &= -\frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\frac{d}{dx}\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n}\left((\pi - x)\cos(nx)|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx)\,dx \right) \\
&= -\frac{1}{n}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d}{dx}\sin(nx)\,dx \right) \\
&= -\frac{1}{n}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Beachte, dass $\sin(n\pi/2) = 0$ für $n = 2k$ und $\sin(n\pi/2) = (-1)^k$ für $n = 2k+1$ und somit folgt

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin((2n+1)x).$$