D-BAUG
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Analysis III

Dienstag, 15. Dez. 2020

Ferienserie

1. Welche Ordnung haben die folgenden PDGn? Welche sind linear und welche sind homogen? Bestimmen Sie für die linearen PDGn zweiter Ordnung, ob sie elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind.

   a) $u_x^2 + e^y u_{yy} = \sin(x)$,
   b) $u_{xx} + e^{-y^2} u_y = 0$,
   c) $u_{xxx} + \exp(u_y) + 4u_{xy} = 1/x$,
   d) $u_{xx} - y^2 u_{yy} + 2yu_y + 2u = \cos(x)^2$,
   e) $9u_{xx} + 12u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
   f) $5u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 7u_x + 3u_y = \exp(-x^2)$

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = |\sin(x/2)|$.

   a) Ist die Funktion f gerade, ungerade oder nichts von beidem?
   b) Ist die Funktion f periodisch? Wenn ja, bestimmen Sie die kleinste Periode.
   c) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

   Tipp: Benutzen Sie die Identität $2\sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$.

3. Berechnen Sie die Fouriertransformation von

   a) $f(x) = 2e^{-3x^2}$,
   b) $f(x) = \begin{cases} 3(1-x/2), & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

4. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & \text{für } 0 \le x \le 3, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(3,t) = 1, & \text{für } t \ge 0, \\ u(x,0) = 1 + \sin(3\pi x), & \text{für } 0 \le x \le 3. \end{cases}$$

Bitte wenden!

5. Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

mit der Formel von d'Alembert, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & \text{für } \quad x \in [0,5], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{für } \quad x \in [0,5], \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

6. Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in K \\ u(x,y) = (x^2 + 2xy + y^2), & (x,y) \in \partial K, \end{cases}$$

wobei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Finden Sie den Wert von u im Punkt $(0,0)$.

b) Finden Sie das Maximum von u auf K.

7. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + 7u_x + 5u = 1, & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit der Methode der Charakteristiken.

8. Finden Sie die Biegelinie eines schmalen homogenen horizontalen Balkens der Länge 6 mit $EI = 2$, der bei $x = 0$ und 6 eingespannt ist, wenn ihn eine Kraft $F = 2$ an der Stelle $x = 2$ nach unten drückt und stellen Sie die Biegelinie graphisch dar.

Schöne Ferien