D-BAUG Analysis III Dienstag, 22. Sept. 2020
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Serie 1

Fällig am 29. Sept. 2020

1. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{rr} + u_{tt} = 0.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lösungen dieser Gleichung sind:

a) $u(r,t) = e^{2r}\cos(2t)$
b) $u(r,t) = 3r^2 t - t^3$
c) $u(r,t) = \sin(r)\cosh(t)$
d) $u(r,t) = \ln(r^2+t^2)$ für $r^2+t^2 \neq 0$
e) $u(r,t) = e^r\cos(t) + 3r^2 t - t^3 + \sin(r)\cosh(t)$

2. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{\vartheta\vartheta} - c^2 u_{rr} = 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lösungen dieser Gleichung sind:

a) $u(r,\vartheta) = \sin(r - c\vartheta)$
b) $u(r,\vartheta) = \ln(r + c\vartheta)$ für $r + c\vartheta > 0$
c) $u(r,\vartheta) = \cos(ar)\sin(ca\vartheta)$, wobei $a \in \mathbb{R}$
d) $u(r,\vartheta) = e^{r+c\vartheta} + e^{r-c\vartheta}$

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_t - k u_{xx} = 0,$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lösungen dieser Gleichung sind:

a) $u(x,t) = x^2 + 2kt$

Bitte wenden!

b) $u(x,t) = e^{-kt}\sin(x)$
c) $u(x,t) = e^{kt}\cosh(x)$
d) $u(x,t) = e^{-a^2kt}\cos(ax)$, wobei $a \in \mathbb{R}$

4. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^\pi \cos(nx)\,dx$ für $n \in \mathbb{N}_+$
b) $\int_{-\pi}^\pi x\sin(nx)\,dx$ für $n \in \mathbb{N}_+$ [Prüfungsfrage]
c) $\int_0^{2\pi} \cos(2x)\cos(x)\,dx$
d) $\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx$ für $n \in \mathbb{N}_+$
e) $\int_0^{2\pi} \sin(3x)^2\,dx$