D-BAUG Analysis III Dienstag, 29. Sept. 2020
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Serie 2

Fällig am 6. Okt. 2020

1. Seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ gegebene Konstanten, v eine Lösung der partiellen Differentialgleichung
$$u_x(x,t) + e^{-2t}u_{xt}(x,t) = b(x,t), \tag{1}$$
wobei b eine stetige Funktion ist und w löse die assoziierte homogene Gleichung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Bitte begründen Sie ihre Antworten.

   a) Die Funktion $u = v + w$ ist wieder eine Lösung von Gleichung (1).

   b) Die Funktion $u = v + \beta w$ ist wieder eine Lösung von Gleichung (1).

   c) Die Funktion $u = \alpha v + \beta w$ ist wieder eine Lösung von Gleichung (1).

   d) Die Funktion $u = \alpha v + \beta w$ ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung
$$u_x(x,t) + e^{-2t}u_{xt}(x,t) = \alpha b(x,t).$$

2. Sei u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung
$$u_t = ku_{xx}, \tag{2}$$
wobei $k \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante ist. Sind dann

   a) $v(x,t) = u(\lambda x - y, \lambda^2 t - s)$ mit gegebenen Konstanten λ, s, y

   b) und $w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-x^2/4kt) u\left(x/t, -1/t\right)$

   Lösungen von Gleichung (2)?

3. Gegeben sei das Anfangs- und Randwertproblem
$$\begin{cases} u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t), & \text{für alle } (x,t) \in [0,10] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0, & \text{für alle } t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & \text{für alle } x \in [0,10]. \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, wenn f von der folgenden Form ist:

Bitte wenden!

a) $f(x) = \sin(5\pi x) - 3\sin(\pi x)$,

b) $f(x) = 2\sin(\frac{7\pi x}{2})$,

c) $f(x) = \sin(3\pi x) + 2\cos(\frac{(6x+5)\pi}{10})$,

d) $f(x) = 6\cos^2(\pi x - \frac{\pi}{4}) - 3$.

4. Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - 2|x|/\pi$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$.

   a) Ist f eine gerade oder eine ungerade Funktion?

   b) Berechnen Sie die Koeffizienten c_n der komplexen Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

   c) Berechnen Sie die Koeffizienten a_n und b_n der reellen Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

   d) Zeigen Sie die Euler'sche Identität:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.* Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \text{für alle} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ x(\pi + x), & \text{für alle} \ -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

   a) Ist f eine gerade oder eine ungerade Funktion?

   b) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von f.

   c) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

   d) Beweisen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$