D-BAUG
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Analysis III

Dienstag, 6. Okt. 2020

Serie 3

Fällig am 13. Okt. 2020

1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen periodisch sind. Falls ja, geben Sie die Periode an.
   a) $f(x) = x^2$
   b) $f(x) = \cos(4x) + \sin(3x)$
   c) $f(x) = \cosh(x)$
   d) $f(x) = \sin^2(x)$
   e) $f(x) = 1 + \tan^2(x)$

2. Sind die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder nichts von beidem?
   a) $f(x) = x^2 + 2$
   b) $f(x) = \cosh(x)$
   c) $f(x) = \sinh(x^3 + 1)$
   d) $f(x) = \sin(x - \pi/2) + \sin(x^2)$
   e) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy$

3. Welche Ordnung haben die folgenden PDGn? Welche sind linear und welche sind homogen?
   a) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$,
   b) $u_{xx} - u_{yy} + xu_x = y$,
   c) $u_{tt} + u_{xxxx} = b$, wobei b eine gegebene Funktion ist,
   d) $u_t - \sum_{i=1}^n (a_i u)_{x_i} = 0$, wobei $a_1, \ldots, a_n$ gegebene Funktionen sind,
   e) $u_t - \Delta u + m^2 u = 0$ für eine Konstante $m > 0$,

   wobei der Laplace-Operator Δf für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch
   $$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
   Begründen Sie Ihre Antworten.

Bitte wenden!

4. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big) \quad \text{für} \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

die folgenden Eigenschaften erfüllt

a) $K_t(x) > 0$ für $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$,
b) $\lim_{t\to 0} K_t(x) = 0$ für $x \neq 0$,
c) $\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x)\,dx = 1$ für $t > 0$,
d) und K ist eine Lösung der PDG

$$u_t - \Delta u = 0$$

für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

5.* Betrachten Sie die Funktion u gegeben durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y)\,dy,$$

wobei f eine stetige, beschränkte Funktion ist und $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Zeigen Sie:

a) u ist eine Lösung der PDG

$$u_t - \Delta u = 0$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,

b) u erfüllt

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$

c) und es gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

für $t > 0$. Hier bezeichnet $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)|$ die kleinste obere Schranke der Menge $\{|g(x)|\colon x \in \mathbb{R}^n\}$, wobei $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist.