D-BAUG | Analysis III | Dienstag, 13. Okt. 2020

Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Serie 4

Fällig am 20. Okt. 2020

1. Sind die folgenden Funktionen schnell fallend?

   a) $f(x) = \sin(x)$,
   b) $f(x) = e^{-a|x|}$, wobei $a > 0$ eine gegebene Konstante ist,
   c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
   d) $f(x, y) = \sin(x^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

   Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden Funktionen:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für alle } |x| < 1, \\ 0, & \text{für alle } |x| \geq 1, \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{für alle } x > 0, \\ 0, & \text{für alle } x \leq 0, \end{cases}$ für eine Konstante $a > 0$.

3. Berechnen Sie

   a) das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$,
   b) und die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-a(x-b)^2}$,

   wobei $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ gegebene Konstanten sind.

4.* Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ schnell fallende Funktionen, sodass all ihre Ableitungen auch schnell fallend sind. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   a) $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\widehat{g}(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n$,
   b) $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\, dx_1 \cdots dx_n = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\mathbf{x})\overline{\widehat{g}(\mathbf{x})}\, dx_1 \cdots dx_n$,
   c) $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\mathbf{k}) = ik_j\widehat{f}(\mathbf{k})$ für $j = 1, \ldots, n$,

Bitte wenden!

d) $\widehat{\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}}(\mathbf{k}) = i^m k_1^{j_1} \cdots k_n^{j_n} \widehat{f}(\mathbf{k})$ mit $j_1 + \ldots + j_n = m$, $m \in \mathbb{N}$,

e) $\widehat{f * g}(\mathbf{k}) = \widehat{f}(\mathbf{k})\, \widehat{g}(\mathbf{k})$, wobei die Faltung $f * g$ gegeben ist durch

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, dy_1 \cdots dy_n.$$

5. Berechnen Sie die Fouriertransformation von

   a) $f(x) = xe^{-ax^2}$,

   b) $f(x) = \int_{-1}^{1} e^{-a(x-y)^2}\, dy$,

   wobei $a > 0$ eine gegebene Konstante ist.