D-BAUG
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Analysis III

Dienstag, 20. Okt. 2020

Serie 5

Fällig am 27. Okt. 2020

1. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen folgender Funktionen:

   a) $f(x,y) = \ln(x + y^2)$,

   b) $f(x,y) = \sin(x-y)\cos(3y + x^2)$,

   c) $f(x,y) = e^{2x+\sqrt{y}}$.

2. Berechnen Sie die Fouriertransformation folgender Funktionen:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{für } |x| \le 1, \\ 0, & \text{für } |x| > 1, \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{für } |x| \le 1, \\ 0, & \text{für } |x| > 1, \end{cases}$

   c) $f(x) = xe^{-4(x-1)^2}$.

3. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \Delta u(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

   wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}_+$.

   a) Berechnen Sie $\frac{\partial r}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}$ für $i = 1,2,3$, wobei $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

   b) Zeigen Sie, dass $u(\mathbf{x},t) = v(|\mathbf{x}|,t)$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn v die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r,t) = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}(r,t)\right) \tag{2}$$

   für alle $r, t \in \mathbb{R}_+$ löst.

Bitte wenden!

c) Finden Sie die Lösung des Anfangs- und Randwertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \Delta u(\mathbf{x},t), & \text{für } (\mathbf{x},t) \in \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \colon |\mathbf{y}| < 1\} \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x},t) = 0, & \text{für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \colon |\mathbf{y}| = 1\},\ t \geq 0, \\ u(\mathbf{x},0) = \frac{\sin(\pi|\mathbf{x}|) - 2\sin(3\pi|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}, & \text{für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \colon |\mathbf{y}| \leq 1\} \end{cases}$$

indem Sie das transformierte Anfangs- und Randwertproblem für die Funktion v mit $u(\mathbf{x},t) = v(|\mathbf{x}|,t)$ lösen. Um die Lösung des transformierten Problems zu finden, gehen Sie wie folgt vor.

(1) Benutzen Sie den Ansatz $v(r,t) = T(t)R(r)$.

(2) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Funktionen T, R?

(3) Lösen Sie die ODE für R mit dem Ansatz $R(r) = S(r)/r$ und der Bedingung $R(0) < \infty$.

(4) Schreiben Sie die allgemeine Lösung v als Superposition der gefundenen Lösungen und benutzen Sie die Anfangsbedingung um die Koeffizienten zu bestimmen.

4.* Seien u, v Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t), & \text{für } (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & \text{für } t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & \text{für } x \in [0,L], \end{cases}$$

wobei $L, \alpha > 0$ gegebene Konstanten sind und betrachten Sie das Energie-Funktional

$$E\left[w\right](t) = \frac{1}{2}\int_0^L w(x,t)^2\,dx$$

für $t \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $E[u](t)$ monoton fallend ist.

b) Wann ist $E[u](t)$ konstant?

c) Zeigen Sie, dass $u = v$ gilt.