Serie 6

Fällig am 3. Nov. 2020

1. Aus dem Satz von Fubini folgt, dass für eine Funktion f von zwei Variablen x und y, für welche das Doppelintegral $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dxdy$ endlich ist, die Identität
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dydx$$
gilt.

   a) Rechnen Sie die folgenden beiden Doppelintegrale aus
   $$\int_0^1\int_0^1 yH(x-y)\,dxdy \quad \text{und} \quad \int_0^1\int_0^1 yH(x-y)dydx,$$
   wobei H die Heaviside Funktion ist.

   b) Zeigen Sie, dass für eine Funktion f von n Variablen $x_1,\dots,x_n$, für welche das $n-$fache Integral $\int_{\mathbb{R}^n}|f(\mathbf{x})|\,dx_1\dots dx_n$ endlich ist, die Identität
   $$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,dx_1\dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,dx_n\dots dx_1$$
   gilt, wobei $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,dx_1\dots dx_n$ die Kurschreibweise für
   $$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$
   ist.

2. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung folgender Funktionen:

   a) $f(x) = \dfrac{32}{x^3-4x}$

   b) $f(x) = \dfrac{6x^2-5x-5}{(x-1)(x^2-x-2)}$

   c) $f(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$

   d) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x(x^2+1)}$

Bitte wenden!

3. Berechnen Sie die Laplacetransformation folgender Funktionen:

   a) $f(t) = t^2 - 5t + 1$

   b) $f(t) = t \sin(at)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante ist

   c) $f(t) = \sinh(t)$

   d) $f(t) = \sqrt{t}$

   Tipp: Für Aufgabe d) benutzen Sie die Substitution $\tau = \sqrt{t}$, partielle Integration und Aufgabe 3 aus Serie 4.

4. Berechnen Sie die inverse Laplacetransformation folgender Funktionen:

   a) $F(s) = \dfrac{1}{(s-8)^{10}}$

   b) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2-9}$

   c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+20}$

   d) $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}$