D-BAUG
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Analysis III

Dienstag, 3. Nov. 2020

Serie 7

Fällig am 10. Nov. 2020

1. Die Faltung $f * g$ von zwei Funktionen $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-t')g(t')\,dt'.$$

   a) Zeigen Sie, dass $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und Funktionen $f, g, h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gilt.

   b) Zeigen Sie, dass die Faltung symmetrisch ist, d.h. es gilt $f * g = g * f$ für alle Funktionen $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

   c) Berechnen Sie die Faltung $\sin(t) * \sin(t)$.

   Tipp: Benutzen Sie Teilaufgabe a), b) und $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Berechnen Sie die Laplacetransformierte von $f(t) = \cos^2(at)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante ist.

   Tipp: Benutzen Sie die Identität $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - x(t) = e^t, \\ x(0) = \dot{x}(0) = 1, \end{cases}$$

   indem Sie das Laplacetransformierte Problem betrachten.

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) = 4\delta(t-1), \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

   indem Sie das Laplacetransformierte Problem betrachten, wobei δ die Dirac-Deltafunktion bezeichnet.

Bitte wenden!

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) - x(t) = 4e^t, \\ x(0) = 9, \dot{x}(0) = 5, \ddot{x}(0) = 3, x^{(3)}(0) = -3 \end{cases}$$

indem Sie das Laplacetransformierte Problem betrachten, wobei wir mit $x^{(3)}, x^{(4)}$ die 3te und 4te Ableitung bezeichnen.

6. Bestimmen Sie mithilfe der Laplacetransformation die Lösung $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgender Integralgleichungen:

   a) $x(t) = \cos(t) + \int_0^t x(u)\,du$ [Prüfungsfrage, 2015]
   b) $6x(t) = 2t^3 + \int_0^t x(u)(t-u)^3\,du$ [Prüfungsfrage, 2015]
   c) $t\sin(t) = \int_0^t x(u)\sin(t-u)\,du$