D-BAUG
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Analysis III

Dienstag, 10. Nov. 2020

Serie 8

Fällig am 17. Nov. 2020

1. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(u)\,du$$
für alle $s \geq 0$ gilt, wobei F die Laplacetransformation von f bezeichnet.

2. a) Zeichnen Sie den Graphen von $f(t) = \tan(t)$ auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$.
   b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \arctan(t)$.
   c) Berechnen Sie die Ableitung von $f(t) = \arctan(t)$.
   d) Berechnen Sie die Laplacetransformation von $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

3. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation das Anfangs- und Randwertproblem
$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t), & \text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 1, & \text{für } t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 + \sin\frac{\pi x}{L}, & \text{für } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$
für gegebene Konstanten $\alpha, L > 0$.

4. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation das Anfangs- und Randwertproblem
$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + \cos\omega t \sin \pi x, & \text{für } 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{für } t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
für gegebene Konstanten $c, \omega > 0$.

   Tipp: Unterscheiden Sie die zwei Fälle $\omega \neq c\pi$ und $\omega = c\pi$.

5. a) Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x,y) = v(x)w(y)$ der Laplace-Gleichung
$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
   für $(x,y) \in D = [0,1]^2$.
   b) Können wir für alle Randbedingungen $g\colon \partial D \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung von der Form $u(x,y) = v(x)w(y)$ finden?