D-BAUG
Prof. Patrick Cheridito
Philipp Zimmermann

Analysis III

Dienstag, 17. Nov. 2020

Serie 9

Fällig am 24. Nov. 2020

1. Lösen Sie folgendes Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \text{für } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) - \sin(2\pi x), & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0, & \text{für } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

2. Lösen Sie folgendes Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \text{für } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = x(1-x), & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & \text{für } 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

3. Lösen Sie folgendes homogene Dirichlet-Problem für die sogenannten Helmholtz-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = -\lambda u(x,y), & \text{für } (x,y) \in D, \\ u(x,y) = 0, & \text{für } (x,y) \in \partial D, \end{cases}$$

wobei $D = [0,1]^2$ und $\lambda \geq 0$.

4. Sei $n \geq 2$. Finden Sie alle Lösungen u der Laplace-Gleichung

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

welche von der Form

$$u(\mathbf{x}) = v(r) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

sind.

Tipp: Unterscheiden Sie den Fall $n = 2$ und $n \geq 3$.

5.* Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzips folgende Aussage: Löst u die Gleichung $\Delta u(x,y) = 0$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ und nimmt u im Innern von D ihr Maximum an, dann ist $u = const.$