D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Schnellübung 4

---

1. (a) Der Schwerpunkt eines Objekts befindet sich am Punkt $5+2i$. An welchem Ort befindet sich der Schwerpunkt des Objekts, nachdem dieses in der komplexen Ebene um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt rotiert wurde?

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z^2 - 3z + 2$ für $z = 2 + i$.

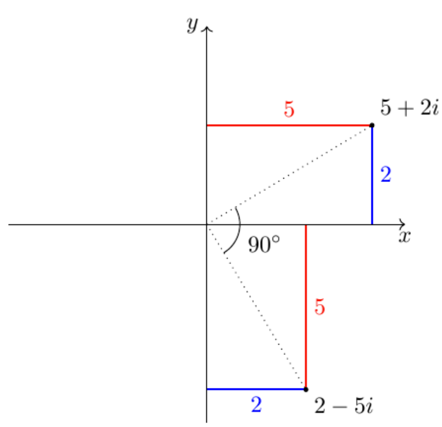
(c) Wie müssen $p, q \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so dass

$$\frac{z+1}{pz+q} = 3 + 2i,$$

wobei $z = 7 + 5i$?

Lösung:

(a) Sei w die Position der Punkt $5+2i$ nach einer Rotation um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt. Aus dem Bild sehen wir, dass $\mathrm{Re}(w) = 2$ und $\mathrm{Im}(w) = -5$. Also $w = 2 - 5i$.



(b) Wir berechnen für $z = 2 + i$:

$$z^2 - 3z + 2 = (2+i)^2 - 3(2+i) + 2 = 4 + 4i + i^2 - 6 - 3i + 2 = i - 1.$$

Also gilt $\mathrm{Re}(z^2 - 3z + 2) = -1$ und $\mathrm{Im}(z^2 - 3z + 2) = 1$.

(c) Wir setzen $z = 7 + 5i$ in $\frac{z+1}{pz+q}$ ein:

$$\frac{z+1}{pz+q} = \frac{8+5i}{7p+q+5pi} = \frac{(8+5i)(7p+q-5pi)}{(7p+q)^2+(5p)^2} = \frac{81p+8q+5(q-p)i}{(7p+q)^2+(5p)^2}$$

Die Bedingung $\frac{z+1}{pz+q} = 3+2i$ und Vergleichung von Reell- und Imaginärteil geben das System

$$\begin{aligned}(7p+q)^2+(5p)^2 &= \frac{1}{3}(81p+8q)\\ (7p+q)^2+(5p)^2 &= \frac{1}{2}(5q-5p).\end{aligned}$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten:

$$q = -177p.$$

Einsetzen in die erste Gleichung gibt: $p = 0$ oder $p = -\frac{1}{65}$. Die Lösung $p = 0$ wurde $q = 0$ implizieren, was nicht erlaubt ist. Somit haben wir $p = -\frac{1}{65}$ und $q = \frac{177}{65}$.

2. (a) Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nehmen an, dass $b \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0;\\ 0, & \text{falls } x = 0;\\ 1, & \text{falls } x > 0\end{cases}$$

für eine reelle Zahl x.

(b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3+4i$.

Lösung:

(a) Da $z_1^2 = z_2^2$ gilt, reicht es, die Behauptung für z_1 zu beweisen. Beachte zuerst, dass die Bedingung $b \neq 0$ impliziert $|w| = \sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$ und somit $|w| + a \geq |a| + a \geq 0$. Analog, $|w| - a \geq 0$. Insbesondere sind die beide Zahlen $\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}$ und $\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}$ reell.

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{|w|+a}{2} + 2i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{(|w|+a)(|w|-a)}{4}} - \mathrm{sgn}(b)^2\frac{|w|-a}{2} \\ &= \frac{|w|+a}{2} - \frac{|w|-a}{2} + i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{(|w|+a)(|w|-a)} = a + i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{|w|^2-a^2} \\ &= a + i\mathrm{sgn}(b)\cdot|b| = a + ib, \end{aligned}$$

da $\mathrm{sgn}(b)\cdot|b| = b$ gilt.

Bemerkung: Für $b = 0$, die Lösungen der Gleichung $z^2 = a$ sind gegeben durch

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{a}, \quad \text{falls } a \geq 0$$

und

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{-a}, \quad \text{falls } a < 0.$$

(b) In diesem Beispiel gilt $|w| = 5$, $a = -3$ und $\text{sgn}(b) = 1$. Einsetzen ergibt

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{5-3}{2}} + i\sqrt{\frac{5+3}{2}}\right) = \pm(1+2i).$$

Beachten Sie, dass diese Formel hier von grossem Nutzen ist, da das Rechnen in Polarform deutlich mühsamer ist (der Polarwinkel ist nicht einfach darstellbar).

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ und seien $A, B \subseteq \mathbb{C}$ die folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

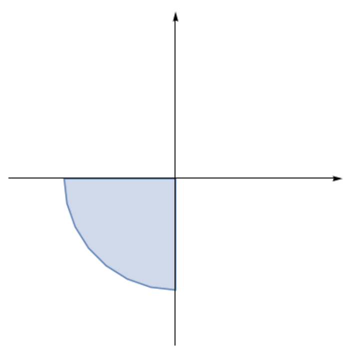
$$A = \left\{re^{\imath\varphi} \mid r \in [0,1]\,, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]\right\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 1\}\,.$$

Zeichnen Sie die Bilder von A und B unter f, das heisst, die Teilmengen $f(A)$ und $f(B) \subset \mathbb{C}$.

Lösung:

- Es gilt $f(re^{i\phi}) = re^{i\phi}re^{i\phi} = r^2e^{i2\phi}$. Beachte $f([0,1]) = [0,1]$, d.h. die Funktion $x \mapsto x^2$ ist surjektiv auf $[0,1]$. Weil $2[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] = [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$. Also ist

$$f(A) = \left\{se^{\imath\theta} \mid s \in [0,1]\,, \theta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$



- Wir schreiben $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 1\} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y \geq 1\}$.
Wir betrachten zuerst das Bild unter f der Gerade $l = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\}$, die B von unten begrenzt. Es gilt $f(x+i) = (x+i)^2 = (x^2-1) + i2x$ und somit

$$f(l) = \{(x^2-1) + i2x \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Wir betrachten $f(l)$ als Bild der Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung

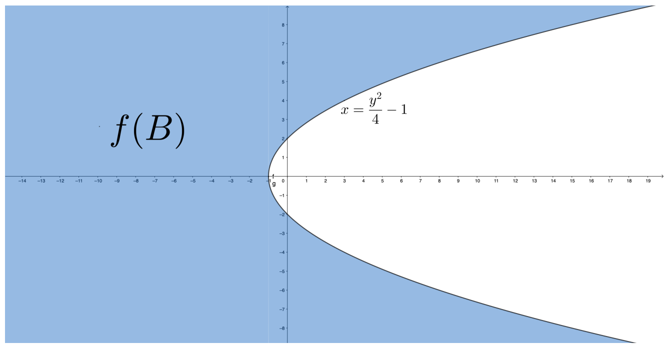
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Es gilt $x(t) = \left(\frac{y(t)}{2}\right)^2 - 1$ und so eine implizite Darstellung der Kurve ist

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1 = \frac{y^2}{4} - 1$$

Diese ist eine Parabel (nach rechts geöffnet) mit Scheitelpunkt $(-1,0)$, die die y-Achse in den Punkten $(0,2)$ und $(0,-2)$ schneidet.

Wir müssen noch bestimmen, ob $f(B)$ 'rechts oder links' von der Parabel liegt. Es gilt $f(2i) = -4$ und so ist $-4 \in f(B)$. Wir schliessen, dass $f(B)$ das unbeschrenktes Gebiet, das links von der Parabel liegt, ist.



4. (a) Gegeben seien die komplexe Zahlen $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$ und $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Berechnen Sie Betrag und Argument von $z = \frac{z_1}{z_2}$.

(b) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche folgende zwei Bedingungen gelten:

i) $\arg((1+i)^2) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7)$,

ii) $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{\exp(i\pi)}\right| \leq \left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| \leq |3+4i|$.

Lösung

(a) Es gilt $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Für z_2 merken wir, dass $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Also gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

Somit gilt es $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2$ und $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Wir bestimmen zuerst alle Zahlen $z = re^{i\phi}$, die die Bedingung i) erfüllen. Sei $w = z^2$, $w = se^{i\vartheta}$ mit $\vartheta \in (-\pi, \pi]$. Dann ist z eine quadratische Wurzel von w und somit gilt $z = \sqrt{s}e^{i\frac{\vartheta}{2}}$ oder $z = \sqrt{s}e^{i\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right)}$, das heisst, $\phi = \frac{\vartheta}{2}$ oder $\phi = \frac{\vartheta}{2} + \pi$.

Es gilt:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{deshalb} \quad \arg\left((1+i)^2\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Zahl -7 befindet sich auf der negativen reellen Achse und somit gilt $\arg(-7) = \pi$.
Also folgt aus Bedingung i): $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$. Und so:

$$\frac{\pi}{4} \leq \phi = \frac{\vartheta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{5\pi}{4} \leq \phi = \frac{\vartheta}{2} + \pi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Bedingung i) wird somit von allen Zahlen $z = re^{i\phi}$ mit $\phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ erfüllt.
Nun betrachten wir Bedingung ii).
Es gilt:

- $|3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{e^{i\pi}}\right| = \frac{|1+2\sqrt{2}i|}{|e^{i\pi}|} = \frac{\sqrt{1+8}}{1} = 3$.
- $\left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| = \frac{|z|}{|2i|} = \frac{|z|}{2}$.

Somit muss es gelten

$$3 \leq \frac{|z|}{2} \leq 5 \quad , \text{das heisst,} \quad 6 \leq |z| \leq 10.$$

Der Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche die Bedingungen i) und ii) gelten ist: