D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Schnellübung 5

---

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int x\, e^{x^2}\, dx$

(b) $\int x\,(1+x^2)^9\, dx$

(c) $\int \frac{1-x^5}{1-x}\, dx$

(d) $\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\, dx$

(e) $\int \frac{x+2}{x+1} dx$

Lösung:

(a) Wir nutzen $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ aus und erhalten

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

(b) Wir benutzen $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{10} = 20x(1+x^2)^9$ und erhalten

$$\int x\,(1+x^2)^9\, dx = \frac{1}{20}(1+x^2)^{10} + C.$$

(c) Da $x = 1$ eine Nullstelle des Zählers ist, spalten wir diese zunächst ab (Polynomdivision) und erhalten

$$1 - x^5 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Damit ergibt sich

$$\int \frac{1-x^5}{1-x}\, dx = \int (1+x+x^2+x^3+x^4)\, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\, dx = \int \frac{(x+1)(x+3)}{x+1}\, dx = \int (x+3)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C.$

(e) Mit $x+2 = x+1+1$ folgt

$$\int \frac{x+2}{x+1} dx = \int \frac{x+1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = x + \log|x+1| + C.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx) dx$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} dx$

Lösung:

(a) Für $n = 0$ ist das Integral gleich 0, da $\sin(0) = 0$. Sei nun also $n \neq 0$. Zweimaliges partielles Integrieren liefert (mit $v = e^{-x}$, $u' = \sin(nx)$)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx)dx &= \left[-\frac{e^{-x}\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(nx)dx \\
&= \frac{1-e^{-2\pi}}{n} - \left[\frac{e^{-x}\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} -\frac{e^{-x}\sin(nx}{n^2}dx \\
&= \frac{1-e^{-2\pi}}{n} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx)dx,
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $\sin(2\pi n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wenn wir das gesuchte Integral mit J bezeichnen, so gilt also die Gleichung

$$\begin{aligned}
& J = \frac{1-e^{-2\pi}}{n} - \frac{1}{n^2}J \\
\Leftrightarrow\ & \left(1+\frac{1}{n^2}\right)J = \frac{1-e^{-2\pi}}{n} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)J = \frac{1-e^{-2\pi}}{n} \\
\Leftrightarrow\ & J = \frac{(1-e^{-2\pi})n}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx)dx = \frac{(1-e^{-2\pi})n}{n^2+1}.$$

(b) Wir benutzen die Subsitution $u = \sqrt{x}$. Dann ist $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$. Also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = \int \frac{2udu}{u+u^4} = \int \frac{2du}{1+u^3}.$$

Der Nenner hat bei $u = -1$ eine Nullstelle und mit Polynomdivision erhalten wir

$$u^3 + 1 = (u+1)(u^2-u+1).$$

Der zweite Faktor $u^2 - u + 1$ auf der rechten Seite hat keine reelle Nullstelle, wir führen also die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{u^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{u+1} + \frac{-\frac{1}{3}u+\frac{2}{3}}{u^2-u+1}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = \int \frac{2du}{1+u^3} &= \int \frac{\frac{2}{3}du}{u+1} + \int \frac{-\frac{2}{3}u+\frac{4}{3}}{u^2-u+1}du \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1} + \int \frac{du}{u^2-u+1} \\
&= \frac{2}{3}\log|u+1| - \frac{1}{3}\log|u^2-u+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(u-\frac{1}{2})) + C \\
&= \frac{2}{3}\log(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{3}\log(x-\sqrt{x}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{x}-\frac{1}{2})) + C.
\end{aligned}$$

Die Berechnung es Integrals von $\frac{1}{u^2-u+1}$ ist im Skript Teil A, Kap. III, Seiten 30-31 ausgeführt (Mit quadratischen Ergänzung führt man das Integral auf die Form $\int 1/(y^2+1)dy$ zurück).

3. Zeigen Sie mittels Induktion, dass für alle $\lambda \neq 0$, $n \geq 0$

$$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k! \lambda^{n-k}} x^k e^{\lambda x} + C.$$

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass die Aussage für $n = 0$ wahr ist: Einerseits gilt es

$$\int x^0 e^{\lambda x} dx = \int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C.$$

Anderseits gilt es

$$\frac{1}{\lambda} (-1)^0 \frac{0!}{0! \lambda^0} x^0 e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}.$$

Sei nun $n \geq 0$ und wir nehmen an, dass die Aussage für n gilt. Wir müssen zeigen, dass

$$\int x^{n+1} e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k! \lambda^{n+1-k}} x^k e^{\lambda x} + C.$$

Wir fangen mit der rechten Seite an:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k! \lambda^{n+1-k}} x^k e^{\lambda x} + C = \\
&\qquad = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k! \lambda^{n+1-k}} x^k e^{\lambda x} \right) + \frac{1}{\lambda} (-1)^{n+1-(n+1)} \frac{(n+1)!}{(n+1)! \lambda^{n+1-(n+1)}} x^{n+1} e^{\lambda x} + C \\
&\qquad = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k! \lambda^{n+1-k}} x^k e^{\lambda x} \right) + \frac{1}{\lambda} x^{n+1} e^{\lambda x} + C \\
&\qquad = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)(-1)^{n-k} \frac{(n+1) \cdot n!}{k! \lambda \cdot \lambda^{n-k}} x^k e^{\lambda x} \right) + \frac{1}{\lambda} x^{n+1} e^{\lambda x} + C \\
&\qquad = \frac{-(n+1)}{\lambda^2} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n!}{k! \lambda^{n-k}} x^k e^{\lambda x} \right) + \frac{1}{\lambda} x^{n+1} e^{\lambda x} + C \\
&\qquad = \left(-\frac{n+1}{\lambda} \int x^n e^{\lambda x} dx \right) + \frac{1}{\lambda} x^{n+1} e^{\lambda x}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Induktionssannahme angewendet. Für die linke Seite benutzten wir partielle Integration ($v = x^{n+1}, u' = e^{\lambda x}$)

$$\int x^{n+1} e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^{n+1} e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda} (n+1) \int x^n e^{\lambda x} dx.$$

Also gilt die Aussage für $n+1$.